Le nombre 8, par exemple, est dans l'ensemble des nombres pairs, en voici une dérivation

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{0}{2}}{4}}{6}}{8}$$

En notant $P$ l'ensemble des nombres pairs, on écrit aussi parfois cette dérivation

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{0 \in P}{2 \in P}}{4 \in P}}{6 \in P}}{8 \in P}$$

Au lieu d'étiqueter les nœuds d'une dérivation par des éléments de $E$, on peut aussi l'étiqueter par des règles.

### Définition 1.9 (Dérivation étiquetée par les règles)

Soit $E$ un ensemble et $f_1, f_2, \ldots$ des règles sur l'ensemble $E$. Une *dérivation étiquetée par les règles* $f_1, f_2, \ldots$ est un arbre dont les nœuds sont étiquetés par $f_1, f_2, \ldots$ tel que le nombre d'enfants d'un nœud étiqueté par une fonction $f$ soit le nombre d'arguments de $f$.

À chaque dérivation étiquetée par les règles, on peut associer, par récurrence structurelle, un élément de $E$ : si la racine de la dérivation est étiquetée par la règle $f_i$ et aux sous-arbres immédiats sont associés les éléments $z_1, \ldots, z_n$, alors on associe l'élément $f_i\ z_1\ \ldots\ z_n$ à la dérivation elle-même.

Quand un élément est associé à une dérivation, on dit que la dérivation est une *dérivation de cet élément*.

On peut donc définir l'ensemble $A$ comme l'ensemble des éléments de $E$ qui ont une dérivation étiquetée par les règles.

## 1.1.5 La fermeture réflexive-transitive d'une relation

Un exemple de définition inductive est celle de la fermeture réflexive-transitive d'une relation.