$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, (t/x)A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A \vdash \Delta} \forall\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ A, \Delta} \forall\text{-droite } x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A \vdash \Delta} \exists\text{-gauche } x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)A, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A, \Delta} \exists\text{-droite}$$

En déduction naturelle, un séquent a toujours une conclusion unique. Dans le système D', un séquent peut avoir une ou plusieurs conclusions, mais il ne peut pas en avoir aucune. En effet, les règles du système D', comme celles de la déduction naturelle, transforment la conclusion des séquents : il faut qu'il y ait quelque chose à transformer. En calcul des séquents, les hypothèses et les conclusions d'un séquent jouent des rôles symétriques et, de même qu'un séquent peut n'avoir aucune hypothèse, il peut n'avoir aucune conclusion. Intuitivement, le séquent $\Gamma \vdash$ est une variante du séquent $\Gamma \vdash \bot$. En effet, de manière générale, dans le système D' comme en calcul des séquents, le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Gamma \vdash \bot, \Delta$ est démontrable.

Cela explique la différence entre la règle $\neg$-droite du calcul des séquents

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-droite}$$

dont la conclusion de la prémisse peut être vide, quand Δ est vide, et la règle homologue du système D'

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot, \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-intro}$$

6.1.3 L'équivalence avec la déduction naturelle

Nous voulons, à présent, montrer qu'un séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable en déduction naturelle si et seulement s'il est démontrable en calcul des séquents. Comme nous avons choisi une formulation du calcul des séquents avec des séquents à plusieurs conclusions, nous montrons l'équivalence avec la formulation homologue de la déduction naturelle, c'est-à-dire le système D'.

Nous commençons par montrer la proposition suivante qui est l'analogue, pour le calcul des séquents, des propositions 1.6 et 1.13.