Nous devons également ajouter une règle de contraction à gauche pour pouvoir utiliser les hypothèses plusieurs fois.

Comme en déduction naturelle, le tiers exclu peut être exprimé par une règle particulière ou, comme nous le faisons ici, par le fait d'utiliser des séquents à plusieurs conclusions.

Enfin, pour montrer l'équivalence du calcul des séquents et de la déduction naturelle nous aurons besoin d'une règle supplémentaire : la règle de *coupure*.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{coupure}$$

dont nous démontrerons ensuite qu'elle est superflue.

Cela mène à la définition suivante.

Définition 6.1 (Les règles du calcul des séquents)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \text{axiome}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{coupure}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{contraction-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{contraction-droite}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top\text{-droite}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow\text{-droite}$$