

Ainsi, quand on cherche à démontrer le séquent $P \wedge Q \vdash P$, rien n'indique qu'il faut utiliser la règle \wedge -élim ni qu'il faut choisir $B = Q$ pour obtenir la démonstration

$$\frac{\overline{P \wedge Q \vdash P \wedge Q} \text{ axiome}}{P \wedge Q \vdash P} \wedge\text{-élim}$$

6.1.2 Les règles du calcul des séquents

La déduction naturelle permet d'exploiter la forme de la conclusion du séquent pour guider le choix des règles d'introduction. En revanche, elle ne permet pas d'utiliser celle des hypothèses pour guider le choix des règles d'élimination. L'idée du *calcul des séquents* est de conserver les règles d'introduction de la déduction naturelle, désormais appelées *règles droites*, et de remplacer les règles d'élimination par des règles d'introduction sur les hypothèses du séquent : les *règles gauches*. Par exemple, la règle \wedge -élim est remplacée par la règle

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge\text{-gauche}$$

Ainsi, le séquent $P \wedge Q \vdash P$ a une démonstration tout à fait différente de sa démonstration en déduction naturelle

$$\frac{\overline{P, Q \vdash P} \text{ axiome}}{P \wedge Q \vdash P} \wedge\text{-gauche}$$

et lors de la recherche d'une démonstration de ce séquent, la forme de l'hypothèse $P \wedge Q$ permet de guider le choix de la règle gauche. Chaque règle d'élimination de la déduction naturelle peut, de même, être remplacée par une règle gauche

$$\begin{aligned} & \frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp\text{-gauche} \\ & \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-gauche} \\ & \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow\text{-gauche} \\ & \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-gauche} \\ & \frac{\Gamma, (t/x)A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} \forall\text{-gauche} \\ & \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} \exists\text{-gauche } x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta \end{aligned}$$