

être utilisées comme dernière règle d'une telle démonstration. Parmi d'autres possibilités, cette dernière règle peut être  $\Rightarrow$ -intro

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow\text{-intro}$$

et, dans ce cas, la seule possibilité est d'avoir  $\Gamma = [P], A = Q, B = P \wedge Q$  et  $\Delta = [ ]$ . La prémisse de cette règle est donc le séquent  $P, Q \vdash P \wedge Q$  et on énumère les différentes règles qui peuvent être utilisées comme dernière règle d'une démonstration de ce séquent. Parmi d'autres possibilités, cette dernière règle peut être  $\wedge$ -intro

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge\text{-intro}$$

et, dans ce cas, la seule possibilité est d'avoir  $\Gamma = [P, Q], A = P, B = Q$  et  $\Delta = [ ]$ . Les prémisses de cette règle sont donc les séquents  $P, Q \vdash P$  et  $P, Q \vdash Q$ . On cherche d'abord une démonstration du premier de ces séquents et on énumère les différentes règles qui peuvent être utilisées comme dernière règle d'un telle démonstration. Parmi d'autres possibilités, cette dernière règle peut être la règle *axiome*, qui permet de conclure. Cette même règle permet de démontrer également le second séquent et on aboutit à la démonstration

$$\frac{\frac{\frac{P, Q \vdash P \text{ axiome} \quad P, Q \vdash Q \text{ axiome}}{P, Q \vdash P \wedge Q} \wedge\text{-intro}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)} \Rightarrow\text{-intro}}$$

Quand on énumère les règles permettant de démontrer le séquent  $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$ , la seule règle d'introduction possible est la règle  $\Rightarrow$ -intro. En effet, la règle  $\vee$ -intro, par exemple, ne permet de démontrer que des propositions de la forme  $A \vee B$  et elle ne peut pas être utilisée pour démontrer une implication. En revanche, pour démontrer ce séquent, on peut utiliser toutes les règles d'élimination, par exemple, la règle  $\wedge$ -élim

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \wedge\text{-élim}$$

De plus, quand on utilise cette règle, le séquent à démontrer  $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$ , nous suggère de prendre  $\Gamma = [P], A = Q \Rightarrow (P \wedge Q)$  et  $\Delta = [ ]$ , mais il ne suggère rien pour  $B$  qui n'apparaît pas dans la conclusion de la règle. Il faut donc choisir une proposition  $B$  et si la proposition choisie n'est pas la bonne, il faut essayer d'autres possibilités. Autrement dit, il est nécessaire d'énumérer toutes les propositions  $B$  possibles.