

6

La démonstration automatique

Nous avons vu, au chapitre 5, que la démontrabilité en logique des prédicats est indécidable, mais semi-décidable, c'est-à-dire qu'il existe une fonction calculable f telle que $f(\ulcorner \Gamma \vdash \Delta \urcorner) = 1$ si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable et f n'est pas définie en $\ulcorner \Gamma \vdash \Delta \urcorner$ sinon. Cette fonction énumère les entiers et teste si l'un d'eux est le numéro d'une démonstration de $\Gamma \vdash \Delta$. Si une telle démonstration existe, son numéro apparaîtra au cours de l'énumération. Sinon, celle-ci se poursuivra à l'infini.

Cette méthode permet de montrer que la démontrabilité en logique des prédicats est semi-décidable, mais elle est sans intérêt pratique. Toutefois, l'idée d'énumération et de test sur laquelle elle repose peut aussi mener à des méthodes moins inefficaces.

6.1 Le calcul des séquents

6.1.1 La recherche de démonstrations en déduction naturelle

Une méthode de recherche de démonstrations consiste à énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud d'une démonstration, en procédant du bas vers le haut. Si on cherche, par exemple, une démonstration du séquent $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$, on commence par énumérer les différentes règles qui peuvent