1.1.3 La récurrence structurelle

Les définitions inductives donnent un moyen de faire des démonstrations par récurrence. Si une propriété est *héréditaire*, c'est-à-dire qu'à chaque fois qu'elle est vérifiée par $y_1, \ldots, y_{n_i}$, elle est vérifiée par $f_i\ y_1\ \ldots\ y_{n_i}$, alors elle est vérifiée par tous les éléments de A.

Une manière de démontrer cela est d'utiliser le second théorème du point fixe et de remarquer que le sous-ensemble P de E des objets qui vérifient la propriété en question est fermé par les fonctions f_i et donc qu'il contient A. Une autre manière est d'utiliser la proposition 1.5 et de montrer, par récurrence sur k, que tous les objets de $F^k\varnothing$ vérifient la propriété en question.

1.1.4 Les dérivations

Un élément x appartient à l'ensemble A si et seulement s'il appartient à un certain ensemble $F^k\varnothing$, c'est-à-dire s'il existe une fonction f_i telle que $x = f_i\ y_1\ \ldots\ y_{n_i}$ où les $y_1, \ldots, y_{n_i}$ appartiennent à $F^{k-1}\varnothing$. Cette remarque permet de démontrer qu'un élément x de E appartient à A si et seulement s'il existe un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des éléments de E, dont la racine est étiquetée par x, et tel que si un nœud est étiqueté par un élément y et ses enfants sont étiquetés par des éléments $z_1, \ldots, z_n$, alors il existe une règle f_i, telle que $y = f_i\ z_1\ \ldots\ z_n$. Un tel arbre s'appelle une *dérivation* de x.

Définition 1.8 (Dérivation)

Soit E un ensemble et $f_1, f_2, \ldots$ des règles sur l'ensemble E. Une *dérivation* dans $f_1, f_2, \ldots$ est un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des éléments de E tel que si un nœud est étiqueté par un élément y et ses enfants par des éléments $z_1, \ldots, z_n$, alors il existe une règle f_i, telle que $y = f_i\ z_1\ \ldots\ z_n$.

Si la racine d'une dérivation est un élément x de E, alors cette dérivation est une *dérivation de x*.

On peut donc définir l'ensemble A comme l'ensemble des éléments de E qui ont une dérivation.

On utilise une écriture particulière pour les dérivations. Tout d'abord, on écrit la racine de l'arbre en bas et les feuilles en haut. Ensuite, on trace un trait au-dessus de chaque nœud de l'arbre et on écrit ses enfants au-dessus de ce trait.