Démonstration. Soit F la fonction de $\wp(E)$ dans $\wp(E)$

$$FC = \{x \in E \mid \exists i \exists y_1 \dots y_{n_i} \in C\ x = f_i\ y_1\ \dots\ y_{n_i}\}$$

Un sous-ensemble C de E est fermé par les fonctions f_1, f_2, ... si et seulement si $FC \subseteq C$.

La fonction F est trivialement croissante : si $C \subseteq C'$, alors $FC \subseteq FC'$. On définit l'ensemble A comme le plus petit point fixe de cette fonction : comme l'intersection de tous les ensembles C tels que $FC \subseteq C$, c'est-à-dire comme l'intersection de tous les ensembles fermés par les fonctions f_1, f_2, ...

D'après le second théorème du point fixe, cet ensemble est un point fixe de F, $FA = A$, et donc $FA \subseteq A$. Il est donc fermés par les fonctions f_1, f_2, ... Et par définition, il est plus petit que tous les ensembles C tels que $FC \subseteq C$, c'est donc le plus petit ensemble fermé par ces fonctions.

Le premier théorème du point fixe nous donne une autre caractérisation de cet ensemble.

Proposition 1.5

Soit E un ensemble et $f_1, f_2, \dots$ des règles sur l'ensemble E. Le plus petit sous-ensemble A de E fermé par les fonctions f_1, f_2, ... est l'ensemble $\bigcup_k (F^k \varnothing)$ où la fonction F est définie par

$$FC = \{x \in E \mid \exists i \exists y_1 \dots y_{n_i} \in C\ x = f_i\ y_1\ \dots\ y_{n_i}\}$$

Démonstration. On a vu que la fonction F est croissante. Elle est, de plus, continue : si $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$, alors $F(\bigcup_j C_j) = \bigcup_j (FC_j)$. En effet, si un élément x de E est dans $F(\bigcup_j C_j)$, alors il existe un entier i et des éléments y_1, ..., y_{n_i} de $\bigcup_j C_j$ tels que $x = f_i\ y_1\ \dots\ y_{n_i}$. Chacun de ces éléments est dans l'un des C_j. Comme la suite des C_j est croissante, ils sont tous dans C_k, le plus grand de ces ensembles. L'élément x appartient donc à FC_k et donc à $\bigcup_j (FC_j)$. Réciproquement, si x appartient à $\bigcup_j (FC_j)$, il appartient à un certain FC_k, il existe donc un entier i et des éléments $y_1, \dots, y_{n_i}$ de C_k tels que $x = f_i\ y_1\ \dots\ y_{n_i}$. Les éléments y_1, ..., y_{n_i} appartiennent à $\bigcup_j C_j$ et donc x à $F(\bigcup_j C_j)$.

On a vu que le plus petit sous-ensemble A de E fermé par les fonctions f_1, f_2, ... est le plus petit point fixe de la fonction F. D'après le premier théorème du point fixe, cet ensemble est $A = \bigcup_k (F^k \varnothing)$.