bâtons de la cinquième bande en écrivant un bâton sur la troisième à chaque fois.

Une machine qui calcule la fonction caractéristique de la relation d'ordre se construit ainsi. Tant que les deux premières lignes contiennent deux bâtons, elle avance sa tête vers la droite, si elle rencontre la configuration $(b, |)$ ou (b, b) elle passe dans un état s, si elle rencontre la configuration $(|, b)$ elle passe dans un état s'. Dans les deux cas, elle ramène la tête à gauche de bande, si elle est dans l'état s' elle passe alors dans son état final, si elle est dans l'état s, elle déplace sa tête à droite, écrit un bâton sur la troisième bande, déplace sa tête à gauche et passe dans son état final.

On peut donc conclure.

Théorème 4.3

Toutes les fonctions calculables sont représentables par une machine de Turing.

Cette proposition a une réciproque : toutes les fonctions représentables par une machine de Turing sont calculables. Il y a, en effet, de nombreuses manières de décrire l'état d'une machine de Turing, c'est-à-dire l'état des bandes, la position de la tête et son état, comme un arbre. On peut, par exemple, introduire une constante pour chaque état et une constante pour chaque élément de Σ. La partie des bandes située à gauche de la tête peut être représentée comme une liste de k-uplet — le premier élément de la liste étant le k-uplet des symboles situés juste à gauche de la tête — et, de même, la partie des bandes situées à droite de la tête comme une autre liste de k-uplets de symboles — le premier élément de la liste étant le k-uplet des symboles situés juste à droite de la tête. Un terme est donc un triplet formé d'un état, d'un k-uplet représentant les cases des bandes situées à la position de la tête et de deux listes de k-uplets représentant les parties gauches et droites des bandes. Ce états peuvent dont être numérotés. Il suffit ensuite de montrer que la fonction qui décrit un pas élémentaire de calcul est calculable.

Exercice 4.10

Donner une démonstration directe du fait que l'ensemble des fonctions calculables par une machine de Turing est clos par définition par récurrence.

Exercice 4.11

Numéroter les arbres est une bonne idée quand on s'intéresse à l'existence des algorithmes, mais non quand on s'intéresse à leur complexité, car ces opérations