partielles f_1 de E^{n_1} dans E, f_2 de E^{n_2} dans E, ... Cette famille définit un sous-ensemble A de E : le plus petit sous-ensemble de E fermé par les fonctions f_1, f_2, ...

Par exemple, le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ formé des nombres pairs est défini inductivement par l'entier 0, c'est-à-dire la fonction, de $\mathbb{N}^0$ dans $\mathbb{N}$, qui prend la valeur 0, et la fonction, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $n \mapsto n+2$. L'ensemble des nombres pairs n'est pas l'unique sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et qui est fermé par la fonction $n \mapsto n+2$, l'ensemble $\mathbb{N}$, par exemple, vérifie également ces propriétés, mais c'est le plus petit.

Le sous-ensemble de $\{a, b, c\}^*$ formé des mots de la forme $a^n bc^n$ est défini inductivement par le mot b et la fonction $m \mapsto amc$. D'une manière générale, une grammaire non contextuelle peut toujours se formuler comme une définition inductive.

Comme nous allons le voir, l'ensemble des théorèmes se définit comme le sous-ensemble de l'ensemble des propositions défini inductivement par les axiomes et les règles de déduction.

Les fonctions f_1, f_2, ... sont appelées des ***règles***. Au lieu de noter une telle règle $x_1 \dots x_n \mapsto t$ on la note

$$\frac{x_1 \dots x_n}{t}$$

Par exemple, l'ensemble des nombres pairs est défini par les deux règles

$$\overline{0}$$

$$\frac{n}{n+2}$$

En notant P l'ensemble des nombres pairs, on écrit aussi parfois ces règles

$$\overline{0 \in P}$$

$$\frac{n \in P}{n+2 \in P}$$

Pour donner un sens à la définition 1.7, montrons qu'il existe toujours un plus petit sous-ensemble A fermé par les fonctions f_1, f_2, ...

Proposition 1.4

Soit E un ensemble et $f_1, f_2, \dots$ des règles sur l'ensemble E. Il existe un plus petit sous-ensemble A de E fermé par les fonctions f_1, f_2, ...