

propres à cette machine, qui contient un état initial et un état final, et comme table la réunion des tables de toutes ces machines, qui est une fonction puisque ces tables sont des fonctions de domaines disjoints. On ajoute des transitions de manière à ce que, quand la machine est dans son état initial, elle effectue une transition vers l'état initial de  $M_1$ , quand elle est dans l'état final de  $M_1$ , elle effectue une transition vers l'état initial de  $M_2$ , ..., quand elle est dans l'état final de  $M_m$ , elle effectue une transition vers l'état initial de  $N$  et quand elle est dans l'état final de  $N$ , elle effectue une transition vers son propre état final. On obtient alors une machine qui, quand elle démarre avec les entiers  $p_1, \dots, p_n$  écrits sur ses  $n$  premières bandes, calcule  $q_1 = g_1(p_1, \dots, p_n)$ ,  $q_2 = g_2(p_1, \dots, p_n)$ , ...,  $q_m = g_m(p_1, \dots, p_n)$  en écrivant les résultats sur les bandes  $n + 2, \dots, m + n + 1$  puis calcule  $h(q_1, \dots, q_m)$  en écrivant le résultat sur la bande  $n + 1$ . Il suffit alors de la modifier de manière à ce qu'elle efface les entiers écrits sur les bandes  $n + 2, \dots, n + m + 1$  et ramène la tête à gauche, pour obtenir une machine qui calcule la composée de  $h$  et  $g_1, \dots, g_m$ .

La machine calculant une fonction définie par minimisation se construit de manière similaire : elle commence par calculer  $g(p_1, \dots, p_n, 0)$  en imitant la machine qui calcule la fonction  $g$ , en lisant ses arguments sur les bandes  $1, \dots, n, n + 1$  et en écrivant le résultat sur la bande  $n + 2$ , si le deuxième élément de la bande  $n + 2$  est un blanc, alors la machine ramène la tête à gauche et passe dans son état final, sinon elle écrit un bâton sur la bande  $n + 1$  et recommence à calculer  $g$  en lisant ses arguments sur les bandes  $1, \dots, n, n + 1$ , ...

Nous avons déjà construit une machine qui calcule la fonction successeur. Une machine qui calcule une projection  $\pi_i^n$  se construit de manière similaire. Cette machine comporte  $n + 1$  bandes. Elle commence par déplacer sa tête vers la droite en écrivant des bâtons sur la bande  $n + 1$  tant qu'elle en trouve sur la bande  $i$ . Quand elle n'en trouve plus, elle ramène la tête à gauche et passe dans son état final.

Une machine qui calcule une fonction nulle est encore plus simple puisqu'il lui suffit de passer directement de son état initial à son état final.

Une machine qui calcule l'addition se construit ainsi. Cette machine commence par recopier le contenu de la première bande sur la quatrième et le contenu de la deuxième bande sur la troisième. Puis elle efface un à un les bâtons de la quatrième bande, de la droite vers la gauche, en ajoutant un bâton sur la troisième bande à chaque fois.

Une machine qui calcule la multiplication se construit de manière similaire. Elle recopie la première bande sur la quatrième. Puis elle efface un à un les bâtons de la quatrième bande en ajoutant à la troisième bande un nombre de bâtons égal au nombre de bâtons de la deuxième bande. Pour cela elle recopie le contenu de la deuxième bande sur la cinquième et elle efface un à un les