

s_2 — l'état final. Elle commence par déplacer sa tête vers la droite en écrivant des bâtons sur la seconde bande tant qu'elle en trouve sur la première. Quand elle n'en trouve plus, elle écrit un bâton de plus, change d'état, ramène la tête à gauche et passe dans son état final. Sa table de transition est donc la suivante.

$$M((\times, \times), s_0) = ((\times, \times), s_0, 1)$$

$$M((|, b), s_0) = ((|, |), s_0, 1)$$

$$M((b, b), s_0) = ((b, |), s_1, -1)$$

$$M((|, |), s_1) = ((|, |), s_1, -1)$$

$$M((\times, \times), s_1) = ((\times, \times), s_2, 0)$$

Naturellement, pour définir complètement la machine, il est nécessaire de compléter la table en indiquant quoi faire dans toutes les autres configurations. Celles-ci n'étant pas atteignables, peu importe la manière dont on complète cette table.

Pour montrer que toutes les fonctions calculables peuvent être calculées par une machine de Turing, on doit montrer que l'ensemble des fonctions calculables par une machine de Turing contient les projections, les fonctions nulles, la fonction successeur, l'addition, la multiplication, la fonction caractéristique de la relation d'ordre et qu'il est clos par composition et minimisation. Commençons par montrer la clôture par la composition qui demande de définir une manière de combiner des machines de Turing.

On remarque tout d'abord, que si une machine calcule une fonction f de \mathbb{N}^n dans \mathbb{N} , il n'est pas difficile de la transformer de manière à ajouter des bandes neutres donc le contenu ne modifie pas l'évolution de la machine et sur laquelle la tête n'écrit jamais. Il n'est pas non plus difficile de transformer une telle machine de manière à ce qu'elle lise ses arguments sur des bandes b_1, \dots, b_n , qui ne sont pas nécessairement les n premières bandes, et écrive son résultat sur une bande b_{n+1} , qui n'est pas nécessairement la $(n+1)$ -ième bande.

Ces deux remarques faites, on peut alors montrer que l'ensemble des fonctions calculables par une machine de Turing est clos par composition. Soient h, g_1, \dots, g_m des fonctions calculées par des machines N et M_1, \dots, M_m . Ces machines utilisent, outre les bandes permettant de lire les arguments et écrire le résultat, un certain nombre de bandes auxiliaires pour effectuer les calculs. On commence par les modifier de manière à ce qu'elles aient toutes $n+m+1+r$ bandes où r est le plus grand nombre de bandes auxiliaires utilisées par l'une des machines M_1, \dots, M_m, N , que M_i lise ses arguments sur les bandes $1, \dots, n$ et écrive son résultat sur la bande $n+1+i$, que N lise ses arguments sur les bandes $n+2, \dots, n+m+1$ et écrive son résultat sur la bande $n+1$ et que les bandes auxiliaires utilisées par toutes ces machines soient au-delà des $n+m+1$ premières bandes.

On construit une machine en prenant comme ensemble d'états l'union disjointe des ensembles d'états de ces $m+1$ machines et d'un ensemble d'états