

état, la table prescrit : un  $k$ -uplet de symboles à écrire sur les bandes, un nouvel état et un déplacement  $-1$  : à gauche,  $0$  : sur place ou  $+1$  : à droite. La tête écrit les  $k$  symboles, change d'état et de position, puis passe au petit pas suivant. La table de transition est donc une fonction de  $\Sigma^k \times S$  dans  $\Sigma^k \times S \times \{-1, 0, +1\}$ . On se limite au cas où la table de transition est telle que la machine n'écrit jamais ni n'efface de croix et ne peut pas se déplacer vers la gauche quand elle lit une suite de  $k$  croix.

Quand la machine démarre, la tête est toujours à gauche, c'est-à-dire sur la première case de chaque bande, et dans un état particulier, appelé *état initial*. Quand elle atteint un certain état, appelé *état final*, si jamais elle l'atteint, elle a terminé son calcul.

Une machine se définit donc par un ensemble fini  $\Sigma$  de symboles, un entier : son nombre de bandes, un ensemble fini d'états, qui contient deux états particuliers : un état initial et un état final, et une table de transition.

Comment calculer avec une telle machine ? On considère des machines dont l'ensemble de symboles  $\Sigma$  contient, outre le symbole blanc et la croix, un troisième symbole : le bâton  $|$ . Une fonction  $f$  de  $\mathbb{N}^n$  dans  $\mathbb{N}$  peut se calculer avec une machine qui contient au moins  $n+1$  bandes. Pour calculer la valeur de cette fonction en un  $n$ -uplet  $p_1, \dots, p_n$ , on considère la configuration initiale dans laquelle la première bande contient une croix suivie de  $p_1$  bâtons, la deuxième bande contient une croix, suivie de  $p_2$  bâtons,  $\dots$ , la  $n$ -ième bande contient une croix, suivie de  $p_n$  bâtons. Les autres bandes contiennent simplement une croix dans la première case. On fait démarrer la machine dans cette configuration, avec la tête à gauche et dans son état initial. La machine évolue alors petit pas après petit pas. Quand elle s'arrête, la  $(n+1)$ -ième bande doit contenir une croix suivie de  $q$  bâtons et les autres bandes doivent être identiques à ce qu'elles étaient dans la configuration initiale. L'entier  $q$  est  $f(p_1, \dots, p_n)$ , c'est le résultat du calcul.

Le langage des machines de Turing entre dans le cadre que nous avons défini dans l'introduction de ce chapitre. Une fonction s'exprime par un entier  $k$  — le nombre de bandes —, un ensemble d'états et une table de transition. Quand on a un tel triplet  $(k, S, M)$  et des entiers  $p_1, \dots, p_n$ , on peut agréger ces informations en un terme qui est la machine à  $k$  bandes dont les  $n$  premières contiennent les entiers  $p_1, \dots, p_n$  et les autres simplement une croix et dont l'ensemble d'états est  $S$  et la table de transition  $M$ . Le pas élémentaire de calcul est une transition formée d'une opération de lecture, d'une opération d'écriture, d'un changement d'état et d'un mouvement de la tête.

On dit donc qu'une fonction est *représentable* par une machine de Turing s'il existe une machine qui la calcule.

Définissons, par exemple, une machine qui calcule le successeur d'un entier. Cette machine comporte deux bandes et trois états  $s_0$  — l'état initial —,  $s_1$  et