Démonstration. Par cas sur la construction de la fonction f, en utilisant les propositions 4.15 et 4.16 dans chacun des cas.

Proposition 4.18

Soit F un terme du lambda-calcul associé à une fonction calculable f et soient $p_1, \ldots, p_n$ des entiers tels que f ne soit pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors le terme $(F\ \underline{p_1}\ \ldots\ \underline{p_n})$ ne termine pas.

Démonstration. Par récurrence sur la construction de la fonction f, on montre plus généralement que si $u_1, \ldots, u_n$ sont des termes qui se réduisent, en appel par nom, en des entiers de Church $\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n}$, alors le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ est isolé.

Les projections, les fonctions identiquement nulles, la fonction successeur, l'addition, la multiplication et la fonction caractéristique de la relation d'ordre sont totales.

Si la fonction f est définie par composition à partir des fonctions h et $g_1, \ldots, g_m$, alors, d'après la proposition 4.12, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en

$$(H\ (G_1\ u_1\ \ldots\ u_n)\ \ldots\ (G_m\ u_1\ \ldots\ u_n))$$

Si l'une des fonctions g_i n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors, par hypothèse de récurrence, l'un des termes $(G_i\ u_1\ \ldots\ u_n)$ est isolé. D'après la proposition 4.17, le terme $(H\ (G_1\ u_1\ \ldots\ u_n)\ \ldots\ (G_m\ u_1\ \ldots\ u_n))$ est isolé. Et d'après la proposition 4.15, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ également. Si, en revanche, il existe des entiers $r_1, \ldots, r_m$ tels que $r_1 = g_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, r_m = g_m(p_1, \ldots, p_n)$, alors h n'est pas définie en $r_1, \ldots, r_m$. Les termes $(G_i\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduisent en $\underline{r_i}$ et, par hypothèse de récurrence, le terme $(H\ (G_1\ u_1\ \ldots\ u_n)\ \ldots\ (G_m\ u_1\ \ldots\ u_n))$ est isolé. D'après la proposition 4.15, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ également.

Si la fonction f est définie par minimisation à partir d'une fonction g alors si g prend des valeurs non nulles en $(p_1, \ldots, p_n, 0)$, $(p_1, \ldots, p_n, 1)$, $\ldots$, alors, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ \underline{0})$, $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S\ \underline{0}))$, $\ldots$ et il est donc isolé. Si, en revanche, la fonction g prend des valeurs non nulles en $(p_1, \ldots, p_n, 0)$, $(p_1, \ldots, p_n, 1)$, $\ldots$, $(p_1, \ldots, p_n, q-1)$ et n'est pas définie en $(p_1, \ldots, p_n, q)$, alors le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $\mathit{Ifz}((G\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0})), (S^q\ \underline{0}), (Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0})))$ où le terme $(G\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0}))$ est isolé. D'après la proposition 4.16, le terme $\mathit{Ifz}((G\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0})), (S^q\ \underline{0}), (Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0})))$ est isolé. Et donc, d'après la proposition 4.15, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ également.

On peut enfin conclure.