Proposition 4.14

Soit F un terme du lambda-calcul associé à une fonction calculable f et soient $p_1, \ldots, p_n$ des entiers tels que $f(p_1, \ldots, p_n) = q$, alors

$$(F\ \underline{p_1}\ \ldots\ \underline{p_n}) \succ^* \underline{q}$$

Démonstration. Par récurrence sur la construction de la fonction f, on montre plus généralement que si $u_1, \ldots, u_n$ sont des termes qui se réduisent, en appel par nom, en $\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n}$, alors $(F\ u_1\ \ldots\ u_n) \succ^* \underline{q}$.

Si f est une projection, une fonction identiquement nulle, la fonction successeur, l'addition, la multiplication ou la fonction caractéristique de la relation d'ordre, la propriété est une conséquence des propositions 4.10 et 4.12.

Si f est une fonction définie par composition des fonctions h et $g_1, \ldots, g_m$, alors il existe des entiers $r_1, \ldots, r_m$ tels que $g_1(p_1, \ldots, p_n) = r_1, \ldots, g_m(p_1, \ldots, p_n) = r_m$ et $h(r_1, \ldots, r_m) = q$. En utilisant la proposition 4.12, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $(H\ (G_1\ u_1\ \ldots\ u_n)\ \ldots\ (G_m\ u_1\ \ldots\ u_n))$. Par hypothèse de récurrence, le terme $(G_1\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $\underline{r_1}, \ldots, (G_m\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $\underline{r_m}$ et $(H\ (G_1\ u_1\ \ldots\ u_n)\ \ldots\ (G_m\ u_1\ \ldots\ u_n))$ se réduit, en appel par nom, en $\underline{q}$.

Si f est une fonction définie par minimisation d'une fonction g, alors pour tout r strictement inférieur à q, $g(p_1, \ldots, p_n, r)$ est un entier non nul et $g(p_1, \ldots, p_n, q) = 0$. Si u est un terme qui se réduit, en appel par nom, vers un entier de Church $\underline{r}$ pour r strictement inférieur à q, alors le terme $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ u)$ se réduit, en appel par nom, en

$$\mathit{Ifz}((G\ u_1\ \ldots\ u_n\ u), u, (Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S\ u)))$$

Par hypothèse de récurrence, le terme $(G\ u_1\ \ldots\ u_n\ u)$ se réduit, en appel par nom, en un entier de Church non nul et donc, d'après la proposition 4.11, le terme $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ u)$ se réduit, en appel par nom, en $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S\ u))$. Ainsi, en utilisant la proposition 4.12, le terme $(F\ u_1\ \ldots\ u_n)$ se réduit, en appel par nom, en $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ \underline{0})$, puis en $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S\ \underline{0}))$, $(Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S\ (S\ \underline{0})))$, $\ldots (Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0}))$. Enfin, ce terme se réduit, en appel par nom, en

$$\mathit{Ifz}((G\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0})), (S^q\ \underline{0}), (Y_{G'}\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S\ (S^q\ \underline{0}))))$$

Par hypothèse de récurrence, le terme $(G\ u_1\ \ldots\ u_n\ (S^q\ \underline{0}))$ se réduit, en appel par nom, en $\underline{0}$ et donc, d'après la proposition 4.11, ce terme se réduit, en appel par nom, en $(S^q\ \underline{0})$ et finalement en $\underline{q}$.

Nous voulons maintenant montrer que si F est un terme du lambda-calcul qui est associé à une fonction calculable f et $u_1, \ldots, u_n$ sont des termes qui