Nous pouvons à présent associer à chaque fonction calculable un terme du lambda-calcul.

Définition 4.30 (La représentation des fonctions calculables)

Soit f une fonction calculable à n arguments, on associe à f un terme du lambda-calcul, défini par récurrence sur la construction de f.

Si f est la i-ième projection, on lui associe le terme

$$\mathit{fun}\ x_1 \rightarrow\ \ldots\ \mathit{fun}\ x_n \rightarrow ((((x_i \& x_1)\& \ldots \& x_{i-1})\& x_{i+1})\& \ldots \& x_n)$$

Si f est la fonction identiquement nulle, on lui associe le terme

$$\mathit{fun}\ x_1 \rightarrow\ \ldots\ \mathit{fun}\ x_n \rightarrow ((\underline{0}\& x_1)\& \ldots \& x_n)$$

Si f est la fonction successeur, on lui associe le terme

$$S = \mathit{fun}\ n \rightarrow ((\mathit{fun}\ x \rightarrow \mathit{fun}\ f \rightarrow (f\ (n\ x\ f)))\& n)$$

Si f est l'addition, on lui associe le terme

$$\mathit{fun}\ p \rightarrow \mathit{fun}\ q \rightarrow ((\mathit{fun}\ x \rightarrow \mathit{fun}\ f \rightarrow (p\ (q\ x\ f)\ f))\& p\& q)$$

Si f est la multiplication, on lui associe le terme

$$\mathit{fun}\ p \rightarrow \mathit{fun}\ q \rightarrow ((\mathit{fun}\ x \rightarrow \mathit{fun}\ f \rightarrow (p\ x\ (\mathit{fun}\ y \rightarrow (q\ y\ f))))\& p\& q)$$

Si f est la fonction caractéristique de la relation d'ordre, on lui associe le terme

$$\mathit{fun}\ p \rightarrow \mathit{fun}\ q \rightarrow ((p\ (K\ \underline{1})\ T\ (q\ (K\ \underline{0})\ T))\& p\& q)$$

où $K = \mathit{fun}\ x \rightarrow \mathit{fun}\ y \rightarrow x$ et $T = \mathit{fun}\ g \rightarrow \mathit{fun}\ h \rightarrow (h\ g)$. Si f est définie par composition des fonctions h et $g_1, \ldots, g_m$, alors soient $G_1, \ldots, G_m$ et H les termes associés à ces fonctions, on associe à f le terme

$$\mathit{fun}\ x_1 \rightarrow\ \ldots\ \mathit{fun}\ x_n \rightarrow ((H\ (G_1\ x_1\ \ldots\ x_n)\ \ldots\ (G_m\ x_1\ \ldots\ x_n))\& x_1\& \ldots \& x_n)$$

Si f est définie par minimisation d'une fonction g, alors soit G le terme associé à cette fonction, soit G' le terme $\mathit{fun}\ f \rightarrow \mathit{fun}\ x_1 \rightarrow\ \ldots\ \mathit{fun}\ x_n \rightarrow \mathit{fun}\ x_{n+1} \rightarrow (\mathit{Ifz}((G\ x_1\ \ldots\ x_n\ x_{n+1}), x_{n+1}, (f\ x_1\ \ldots\ x_n\ (S\ x_{n+1}))))$ on associe à f le terme

$$\mathit{fun}\ x_1 \rightarrow\ \ldots\ \mathit{fun}\ x_n \rightarrow ((Y_{G'}\ x_1\ \ldots\ x_n\ \underline{0})\& x_1\& \ldots \& x_n)$$

Nous voulons maintenant montrer que ces termes représentent les fonctions calculables auxquelles ils sont associés.