$\mathcal{I}_n^{x,fun\ y \to (u\ y\ f)}$, alors il se réduit, en appel par nom, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ x)\ldots))$, avec $n \times p$ occurrences du symbole f. Dans le cas $n = 0$, le terme v se réduit, en appel par nom, en x. Sinon, il se réduit, en appel par nom, en $((fun\ y \to (u\ y\ f))\ v')$, puis en $(u\ v'\ f)$ avec v' dans $\mathcal{I}_{n-1}^{x,fun\ y \to (u\ y\ f)}$. D'après la proposition 4.9 ce terme appartient à $\mathcal{I}_p^{v',f}$ et, d'après le lemme ci-avant, il se réduit donc, en appel par nom, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ v')\ldots))$ avec p occurrences du symbole f, puis, par hypothèse de récurrence, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ x)\ldots))$ avec $p + (n-1) \times p = n \times p$ occurrences du symbole f. D'après la proposition 4.9, le terme $(t\ x\ (fun\ y \to (u\ y\ f)))$ appartient à $\mathcal{I}_n^{x,fun\ y \to (u\ y\ f)}$, il se réduit donc, en appel par nom, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ x)\ldots))$ avec $n \times p$ occurrences du symbole f. Le terme $fun\ x \to fun\ f \to (t\ x\ (fun\ y \to (u\ y\ f)))$ se réduit donc, en appel par nom, en $\underline{n \times p}$.

- On montre, par récurrence sur $n + p$, que si a est un terme de $\mathcal{I}_n^{(K\ \underline{\alpha}),T}$ et b est un terme de $\mathcal{I}_p^{(K\ \underline{\beta}),T}$, alors $(a\ b)$ se réduit, en appel par nom, en $\underline{\alpha}$, si $n \leq p$, et en $\underline{\beta}$, si $p + 1 \leq n$. Si $n = 0$, alors le terme a se réduit, en appel par nom, en $(K\ \underline{\alpha})$ et comme ce terme n'est pas de la forme *fun*, le terme $(a\ b)$ se réduit, en appel par nom, en $(K\ \underline{\alpha}\ b)$, qui se réduit à son tour, en appel par nom, en $\underline{\alpha}$. Sinon, le terme a se réduit, en appel par nom, en $(T\ a')$, où a' est un élément de $\mathcal{I}_{n-1}^{(K\ \underline{\alpha}),T}$, et comme ce terme n'est pas de la forme *fun*, le terme $(a\ b)$ se réduit, en appel par nom, en $(T\ a'\ b)$, qui se réduit à son tour, en appel par nom, en $(b\ a')$ qui, par hypothèse de récurrence, se réduit, en appel par nom, en $\underline{\beta}$, si $p \leq n - 1$, c'est-à-dire si $p + 1 \leq n$, et en $\underline{\alpha}$, si $n \leq p$. D'après la proposition 4.9, le terme $(t\ (K\ \underline{1})\ T)$ appartient à $\mathcal{I}_n^{(K\ \underline{1}),T}$ et le terme $(u\ (K\ \underline{0})\ T)$ à $\mathcal{I}_p^{(K\ \underline{0}),T}$. Le terme $(t\ (K\ \underline{1})\ T\ (u\ (K\ \underline{0})\ T))$ se réduit donc en $\underline{1}$, si $n \leq p$ et en $\underline{0}$ sinon, c'est-à-dire en $\underline{\chi_{\leq}(n,p)}$.

Définition 4.27 (Le test)

On pose

$$Ifz(t, u, v) = (t\ u\ fun\ x \to v)$$

où x est une variable qui n'apparaît pas dans v.

Proposition 4.11

Soient t, u et v trois termes du lambda-calcul tels que t se réduise, en appel par nom, en un entier de Church $\underline{p}$. Si $p = 0$, alors $Ifz(t, u, v) \succ^* u$, et si $p \neq 0$, $Ifz(t, u, v) \succ^* v$.