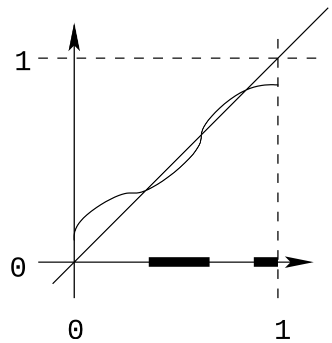

Démonstration. Soit C l'ensemble $\{c \mid fc \leq c\}$ et c un élément de C. On a $p \leq c$ car p est un minorant de C. La fonction f étant croissante, on en déduit $fp \leq fc$. Par ailleurs, $fc \leq c$ car c est un élément de C, donc par transitivité $fp \leq c$.

L'élément fp est inférieur à tous les éléments de C, il est donc inférieur à sa borne inférieure : $fp \leq p$.

La fonction f étant croissante, $f(fp) \leq fp$, donc fp est un élément de C et p étant un minorant de C, on en déduit $p \leq fp$. Par antisymétrie, $p = fp$.

Enfin, par définition, tous les points fixes de f appartiennent à C, ils sont donc plus grands que p.

1.1.2 Les définitions inductives

Voyons maintenant comment ce théorème du point fixe permet de définir des ensembles et des relations.

Définition 1.6 (Fermeture)

Soit E un ensemble, f une fonction partielle de E^n dans E et A un sous-ensemble de E. L'ensemble A est dit *fermé* par la fonction f si pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans A, tels que la fonction f soit définie en $x_1, \ldots, x_n$, $f\ x_1\ \ldots\ x_n$ est également un élément de A.

Par exemple, l'ensemble des nombres pairs est fermé par la fonction $n \mapsto n + 2$.

Définition 1.7 (Définition inductive)

Soit E un ensemble, une *définition inductive* sur E est une famille de fonctions