est égal à $((\mathit{fun}\ y_1 \to ((\mathit{fun}\ z \to r')\ s_1\ \ldots\ s_m))\ u\ v)$, il se réduit, en appel par nom, en deux étapes, en w, dont on a montré qu'il appartenait à $\mathcal{I}_p^{u,v}$. Si $n = 2$, le terme $(t'\ u\ v)$ est égal à $((\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to ((s_1/z)r'\ s_2\ \ldots\ s_m))\ u\ v)$, il se réduit, en appel par nom, en deux étapes, en $b = ((u/y_1, v/y_2, (u/y_1, v/y_2)s_1/z)r'\ (u/y_1, v/y_2)s_2 \ldots (u/y_1, v/y_2)s_m)$. Par hypothèse de récurrence, ce terme appartient à $\mathcal{I}_p^{u,v}$. Le terme $(t\ u\ v)$ est égal à $((\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to ((\mathit{fun}\ z \to r')\ s_1\ \ldots\ s_m))\ u\ v)$, il se réduit, en appel par nom, en trois étapes, en b. Le terme $(t\ u\ v)$ se réduit donc, en deux étapes, en un terme w qui se réduit en b. On a montré que le terme b appartenait à $\mathcal{I}_p^{u,v}$, c'est donc également le cas du terme w.

Proposition 4.10

Si t et u sont des termes qui se réduisent, en appel par nom, en des entiers de Church $\underline{n}$ et $\underline{p}$, et x, y et f sont des variables qui n'apparaissent pas dans t et u, alors

- le terme $\mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (f\ (t\ x\ f))$ se réduit, en appel par nom, en le terme $\underline{n+1}$,
- le terme $\mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (t\ (u\ x\ f)\ f)$ se réduit, en appel par nom, en le terme $\underline{n+p}$,
- le terme $\mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (t\ x\ (\mathit{fun}\ y \to (u\ y\ f)))$ se réduit, en appel par nom, en le terme $\underline{n \times p}$,
- le terme $(t\ (K\ \underline{1})\ T\ (u\ (K\ \underline{0})\ T))$, où $K = \mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ y \to x$ et $T = \mathit{fun}\ g \to \mathit{fun}\ h \to (h\ g)$, se réduit, en appel par nom, en le terme $\underline{\chi_{\leq}(n,p)}$.

Démonstration. On commence par montrer le lemme suivant par récurrence sur n : si un terme appartient à $\mathcal{I}_n^{v,f}$ où f est une variable et v un terme quelconque, alors ce terme se réduit, en appel par nom, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ v)\ldots))$ avec n occurrences du symbole f. On démontre ensuite les quatre propositions.

- Le terme $(t\ x\ f)$ se réduit, en appel par nom, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ x)\ldots))$ avec n occurrences du symbole f, le terme $(f\ (t\ x\ f))$ en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ x)\ldots))$ avec $n+1$ occurrences du symbole f et le terme $\mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (f\ (t\ x\ f))$ en $\underline{n+1}$.
- En utilisant la proposition 4.9, le terme $v = (u\ x\ f)$ appartient à $\mathcal{I}_p^{x,f}$ et le terme $(t\ (u\ x\ f)\ f)$ appartient à $\mathcal{I}_p^{v,f}$. En utilisant le lemme ci-avant, le terme $(t\ (u\ x\ f)\ f)$ se réduit, en appel par nom, en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ v)\ldots))$ avec n occurrences du symbole f, puis en $(f\ (f\ \ldots\ (f\ x)\ldots))$ avec $n+p$ occurrences du symbole f. Le terme $\mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (t\ (t\ x\ f)\ f)$ se réduit donc, en appel par nom, en $\underline{n+p}$.
- On montre, par récurrence sur n, que si un terme v appartient à