Définition 4.26

L'ensemble $\mathcal{I}_0^{u,v}$ est l'ensemble des termes qui se réduisent, en appel par nom, en u et l'ensemble $\mathcal{I}_{p+1}^{u,v}$ est l'ensemble des termes qui se réduisent en appel par nom, en un terme de la forme $(v\ w)$ où $w \in \mathcal{I}_p^{u,v}$.

Proposition 4.9

Si le terme t se réduit en $\underline{p}$, en appel par nom, alors le terme $(t\ u\ v)$ appartient à $\mathcal{I}_p^{u,v}$.

Démonstration. On montre, plus généralement, qu'il existe un terme w de $\mathcal{I}_p^{u,v}$, tel que le terme $(t\ u\ v)$ se réduise en w, en appel par nom, en deux étapes. Par récurrence double sur p et sur la longueur de la réduction de t à $\underline{p}$.

Si $t = \underline{p}$, alors le terme $(t\ u\ v)$ se réduit, en appel par nom, en deux étapes, en le terme $w = (v\ (v\ \dots\ (v\ u)\dots))$, avec p occurrences du terme v, qui appartient à $\mathcal{I}_p^{u,v}$.

Sinon, il existe un terme t' tel que $t \succ t'$ et t' se réduise en $\underline{p}$ en appel par nom en une étape de moins. Le cas où le terme t n'est pas de la forme *fun* est facile, car dans ce cas, le terme $(t\ u\ v)$ se réduit en $(t'\ u\ v)$ en appel par nom et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Si, en revanche, t est de la forme *fun*, il s'écrit $\mathit{fun}\ y_1 \to \dots\ \mathit{fun}\ y_n \to t_1$ où t_1 n'est pas de la forme *fun* et $n \neq 0$. Le terme t se réduisant en un entier de Church, on a $n = 1$ ou $n = 2$. Écrivons $t_1 = (r\ s_1\ \dots\ s_m)$ où r n'est pas une application. Le terme r est donc une variable ou un terme de la forme *fun*.

Si le terme r est une variable, alors le terme t se réduisant en un entier de Church, mais n'étant pas irréductible, $n = 2$, $r = y_2$, $m = 1$. Le terme $(t\ u\ v)$ est donc égal à $((\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to (y_2\ s_1))\ u\ v)$ et il se réduit, en appel par nom, en deux étapes, en le terme $w = (v\ (u/y_1, v/y_2)s_1)$. On pose $w' = (u/y_1, v/y_2)s_1$. Le terme $\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to s_1$ se réduit en $\underline{p-1}$ en appel par nom et le terme $((\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to s_1)\ u\ v)$ se réduit en w', en appel par nom, en deux étapes. Par hypothèse de récurrence, le terme w' appartient à $\mathcal{I}_{p-1}^{u,v}$ et donc w appartient à $\mathcal{I}_p^{u,v}$.

Si le terme r est de la forme $\mathit{fun}\ z \to r'$, alors $t_1 = ((\mathit{fun}\ z \to r')\ s_1\ \dots\ s_m)$ et ce terme n'étant pas de la forme *fun*, $m \neq 0$. Le terme t est donc de la forme $\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to \dots\ \mathit{fun}\ y_n \to ((\mathit{fun}\ z \to r')\ s_1\ s_2\ \dots\ s_m)$ et le terme t' en lequel il se réduit en appel par nom en une étape est $\mathit{fun}\ y_1 \to \mathit{fun}\ y_2 \to \dots\ \mathit{fun}\ y_n \to ((s_1/z)r'\ s_2\ \dots\ s_m)$. Si $n = 1$, le terme $(t'\ u\ v)$ est égal à $((\mathit{fun}\ y_1 \to ((s_1/z)r'\ s_2\ \dots\ s_m))\ u\ v)$ et il se réduit, en appel par nom, en une étape, en $w = (((u/y_1, (u/y_1)s_1/z)r'\ (u/y_1)s_2\ \dots\ (u/y_1)s_m)\ v)$. Par hypothèse de récurrence, ce terme appartient à $\mathcal{I}_p^{u,v}$. Le terme $(t\ u\ v)$