– Un terme F du lambda-calcul représente une fonction f des entiers dans les entiers si et seulement si pour tout n-uplet d'entiers $p_1, \ldots, p_n$
  – si $f(p_1, \ldots, p_n) = q$, alors $(F\ \underline{p_1}\ \ldots\ \underline{p_n}) \succ^* \underline{q}$,
  – si f n'est pas définie en $p_1, \ldots, p_n$, alors le terme $(F\ \underline{p_1}\ \ldots\ \underline{p_n})$ ne termine pas en appel par nom.

La réduction en appel par nom nous permet de revenir dans le cadre que nous avons défini dans l'introduction de ce chapitre. Un programme est un terme du lambda-calcul, le terme formé du programme F et des entiers $p_1, \ldots, p_n$ est simplement le terme $(F\ \underline{p_1}\ \ldots\ \underline{p_n})$ et le pas élémentaire de calcul est la réduction en appel par nom.

Nous voulons maintenant montrer que toutes les fonctions calculables sont représentables dans le lambda-calcul. Le choix du terme $\underline{p}$ représentant l'entier p a été originellement guidé par la volonté de représenter les fonctions définies par récurrence, qui a mené à donner une réponse originale à la question : qu'est-ce qu'un entier ? Au lieu de répondre que l'entier 3 est ce qu'il y a de commun à tous les ensembles de trois éléments, ce qui mène à la définition des entiers comme des cardinaux, on répond que l'entier 3 est un algorithme qui itère trois fois une fonction. Cela mène à la définition

$$\underline{3} = \mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (f\ (f\ (f\ x)))$$

et plus généralement à la définition suivante.

Définition 4.25 (Les entiers de Church)

Le terme $\underline{p}$ est le terme

$$\underline{p} = \mathit{fun}\ x \to \mathit{fun}\ f \to (\underbrace{f\ (f\ \ldots\ (f}_{p \text{ fois}}\ x)\ldots))$$

Si le terme t est l'entier de Church $\underline{p}$ et que u et v sont des termes quelconques, alors le terme $(t\ u\ v)$ se réduit en appel par nom en deux étapes en le terme $w = (v\ (v\ \ldots\ (v\ u)\ldots))$ avec p occurrences du terme v.

Cependant, si le terme t se réduit, en appel par nom, en $\underline{p}$, sans être nécessairement égal à $\underline{p}$, on ne peut pas montrer que le terme $(t\ u\ v)$ se réduit en le terme $(v\ (v\ \ldots\ (v\ u)\ldots))$ car, quand on réduit $(t\ u\ v)$ en appel par nom, dès que le terme t a été réduit en un terme de la forme *fun*, le radical prioritaire n'est plus dans le réduit de t, mais à la racine. Toutefois, on peut montrer que si le terme t se réduit en $\underline{p}$ alors le terme $(t\ u\ v)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{I}_p^{u,v}$ où la famille d'ensembles $(\mathcal{I}_p^{u,v})_p$ est définie par récurrence sur p de la manière suivante.