Définition 4.20 (La bêta-réduction)

La bêta-réduction $\rhd^*$ est la fermeture réflexive-transitive de la relation $\rhd$.

Définition 4.21 (Irréductibilité, terminaison)

On dit qu'un terme t est *irréductible*, s'il est irréductible pour la relation $\rhd$, c'est-à-dire si aucun de ses sous-termes n'est un radical.

On dit qu'un terme t *termine* s'il termine pour la relation $\rhd$, c'est-à-dire s'il existe un terme irréductible t' tel que $t \rhd^* t'$.

Par exemple, le terme $((\mathit{fun}\, x \to (x\ x))\ y)$ termine car il se réduit en le terme irréductible $(y\ y)$. En revanche, le terme $\omega = ((\mathit{fun}\, x \to (x\ x))\ (\mathit{fun}\, x \to (x\ x)))$ ne termine pas, car le seul terme en lequel il se réduit est ω lui-même. Le terme $((\mathit{fun}\ x \to y)\ \omega)$, quant à lui, termine car il se réduit en le terme irréductible y.

Puisque, quand un terme contient plusieurs radicaux, on peut réduire n'importe lequel de ces radicaux, rien n'empêche, *a priori*, un terme de se réduire en plusieurs termes irréductibles distincts. On peut cependant montrer que ce n'est pas le cas, en utilisant un théorème de confluence de la relation $\rhd$, qui se démontre en montrant la confluence forte d'une relation de bêta-réduction parallèle, comme à l'exercice 4.7, mais que nous ne démontrons pas ici.

Proposition 4.6 (La confluence de la bêta-réduction)

La relation $\rhd$ est confluente.

La relation $\rhd$ étant confluente, un terme u se réduit en au plus un terme irréductible : si $t \rhd^* u$ et $t \rhd^* v$ et u et v sont irréductibles, alors $u = v$. Plus généralement, si t, u et v sont trois termes tels que $t \rhd^* u$ et $t \rhd^* v$ et v est irréductible, alors $u \rhd^* v$. En revanche, certains termes, comme le terme $((\mathit{fun}\ x \to y)\ \omega)$ ci-avant, se réduisent en un terme irréductible, si on choisit de réduire un radical, et se réduisent à l'infini, si on choisit d'en réduire un autre.

On peut remarquer que le lambda-calcul n'est pas tout à fait un ensemble de règles de réécriture au sens de la section précédente, car le symbole *fun* lie une variable, alors que les langages considérés à la section précédente était sans lieurs. De plus, le membre droit de la règle de bêta-réduction utilise une opération annexe : la substitution. Enfin, dans le membre gauche de la règle de bêta-réduction, on ne peut pas considérer t et u comme des variables que l'on instancierait avec une substitution σ, car la substitution évitant les captures, cela interdirait à x d'apparaître dans le terme t. Il serait donc nécessaire d'in-