Appliquer cette fonction f aux nombres 3 et 4 demande de l'appliquer d'abord à 3, ce qui donne le terme $(f\ 3)$, qui est la fonction qui à y associe $3 \times 3 + y \times y$, puis à 4, ce qui donne le terme $((f\ 3)\ 4)$.

Définition 4.16 (Le langage du lambda-calcul)

Le langage du lambda-calcul est formé d'un symbole binaire *App* qui ne lie pas de variables et d'un symbole unaire *fun* qui lie une variable dans son argument.

Quand on applique une fonction $\mathit{fun}\ x \to t$ à un terme u, on veut pouvoir transformer cette expression en l'expression $(u/x)t$ dans laquelle l'argument formel x a été substitué par l'argument réel u. Cette transformation est le pas élémentaire de calcul du lambda-calcul que l'on itère.

Définition 4.17 (Une étape de bêta-réduction à la racine)

Une étape de bêta-réduction à la racine est la relation sur les termes du lambda-calcul $\longrightarrow$ définie par

$$((\mathit{fun}\ x \to t)\ u) \longrightarrow (u/x)t$$

Définition 4.18 (Radical)

Un *radical* est un terme réductible par la relation $\longrightarrow$, c'est-à-dire un terme de la forme $((\mathit{fun}\ x \to t)\ u)$.

La relation $\longrightarrow$ s'étend en une relation qui permet de réduire un terme de la forme $((\mathit{fun}\ x \to t)\ u)$ dans un sous-terme.

Définition 4.19 (Une étape de bêta-réduction)

Une étape de bêta-réduction est la relation sur les termes du lambda-calcul $\rhd$ inductivement définie par

- si $t \longrightarrow t'$, alors $t \rhd t'$,
- si $t \rhd t'$, alors $(t\ u) \rhd (t'\ u)$,
- si $u \rhd u'$, alors $(t\ u) \rhd (t\ u')$,
- si $t \rhd t'$, alors $(\mathit{fun}\ x \to t) \rhd (\mathit{fun}\ x \to t')$.