$$\frac{t \rhd t'}{f(t) \rhd f(t')}$$

$$\frac{t_1 \rhd t_1'}{g(t_1, t_2) \rhd g(t_1', t_2)}$$

$$\frac{t_2 \rhd t_2'}{g(t_1, t_2) \rhd g(t_1, t_2')}$$

A-t-on $g(a, a) \rhd g(b, b)$? La relation $\rhd$ définie par cet ensemble de règles est-elle fortement confluente ?

2. Soit la variante de cette relation, *la réduction parallèle*, inductivement définie par les règles

$$\overline{t \rhd^{\|} t}$$

$$\overline{a \rhd^{\|} b}$$

$$\overline{f(t) \rhd^{\|} g(t, t)}$$

$$\frac{t \rhd^{\|} t'}{f(t) \rhd^{\|} f(t')}$$

$$\frac{t_1 \rhd^{\|} t_1' \quad t_2 \rhd^{\|} t_2'}{g(t_1, t_2) \rhd^{\|} g(t_1', t_2')}$$

A-t-on $g(a, a) \rhd^{\|} g(b, b)$? Montrer que la relation $\rhd^{\|}$ est fortement confluente. Montrer que la relation $\rhd^{\|}$ est confluente.

3. Montrer que si $t \rhd u$ alors $t \rhd^{\|} u$. Montrer que si $t \rhd^* u$ alors $t \rhd^{\|*} u$. Montrer que si $t \rhd^{\|} u$ alors $t \rhd^* u$. Montrer que si $t \rhd^{\|*} u$ alors $t \rhd^* u$. Montrer que la relation $\rhd$ est confluente.

Exercice 4.8 (Le principe de récurrence nœthérienne)

Soit R une relation définie sur un ensemble E. Une *suite de réductions* pour cette relation est une suite finie ou infinie $x_0, x_1, x_2, \ldots$ telle que pour tout i, $x_i \ R \ x_{i+1}$. On dit qu'un élément x de E *termine fortement* si toute suite de réductions issue de x est finie.

On dit que la relation R *termine fortement* ou encore qu'elle est *bien fondée* ou encore qu'elle est *nœthérienne* si tout élément termine fortement.

1. Montrer qu'un élément qui termine fortement termine.
2. Donner une relation pour laquelle tout élément termine, mais il existe des éléments qui ne terminent pas fortement.