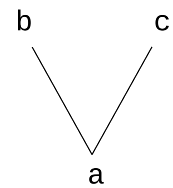
Exercice 1.1

Montrer que toute relation fortement complète est faiblement complète.

La relation d'ordre



est-elle faiblement complète ? Est-elle fortement complète ?

Proposition 1.2

Si la relation d'ordre $\leq$ sur l'ensemble E est fortement complète, alors tout sous-ensemble A de E a une borne inférieure, $\inf A$.

Démonstration. Soit A un sous-ensemble quelconque de E, soit B l'ensemble $\{y \in E \mid \forall x \in A \; y \leq x\}$ des minorants de A et l la borne supérieure de B. Par définition, l est un majorant de l'ensemble B

– $\forall y \in B \; y \leq l$

et c'est le plus petit

– $(\forall y \in B \; y \leq l') \Rightarrow l \leq l'$.

Il n'est pas difficile de démontrer que l est la borne inférieure de A. En effet, si x est un élément de A, c'est un majorant de B et comme l est le plus petit de ces majorants, $l \leq x$. Donc l est un minorant de A. Pour montrer que c'est le plus grand, il suffit de remarquer que si m est un minorant de A, c'est un élément de B et donc $m \leq l$.

La borne inférieure d'un sous-ensemble B de l'ensemble des parties d'un ensemble A est, bien entendu, l'ensemble $\bigcap_{C \in B} C$.

Proposition 1.3 (Le second théorème du point fixe)

Soit $\leq$ une relation d'ordre fortement complète sur un ensemble E. Soit f une fonction de E dans E. Si f est croissante, alors $p = \inf\{c \mid fc \leq c\}$ est le plus petit point fixe de f.