2
Les modèles

Après avoir donné une définition de la notion de démonstration, au chapitre précédent, nous allons, dans ce chapitre, étudier certaines propriétés des démonstrations. En particulier nous allons introduire des outils qui permettent de démontrer des *résultats d'indépendance* de la forme : il n'existe pas de démonstration de la proposition A dans la théorie $\mathcal{T}$.

S'il était nécessaire de se restreindre à des propositions combinatoires pour définir la notion de démonstration, aucune restriction n'est, en revanche, nécessaire pour étudier les démonstrations : pour démontrer des résultats d'indépendance, nous pouvons utiliser tous les outils mathématiques que nous voulons.

2.1 La notion de modèle

Définition 2.1 (Modèle)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage. Un *modèle* de ce langage est une structure $\mathcal{M} = ((\mathcal{M}_s)_{s\in\mathcal{S}}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^+, (\hat{f})_{f\in\mathcal{F}}, (\hat{P})_{P\in\mathcal{P}}, \hat{\top}, \hat{\bot}, \hat{\neg}, \hat{\wedge}, \hat{\vee}, \hat{\Rightarrow}, \hat{\forall}, \hat{\exists})$ formée,

- pour chaque sorte s de $\mathcal{S}$, d'un ensemble non vide $\mathcal{M}_s$,
- d'un ensemble non vide $\mathcal{B}$, d'un sous-ensemble $\mathcal{B}^+$ de $\mathcal{B}$,
- pour chaque symbole de fonction f de $\mathcal{F}$ d'arité $(s_1, \ldots, s_n, s')$ d'une fonction $\hat{f}$ de $\mathcal{M}_{s_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_{s_n}$ dans $\mathcal{M}_{s'}$,
- pour chaque symbole de prédicat P de $\mathcal{P}$ d'arité $(s_1, \ldots, s_n)$ d'une fonction $\hat{P}$ de $\mathcal{M}_{s_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_{s_n}$ dans $\mathcal{B}$,

– de deux éléments $\hat{\top}$ et $\hat{\bot}$ de $\mathcal{B}$, d'une fonction $\hat{\neg}$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$, de fonctions $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ et $\hat{\Rightarrow}$ de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ et de deux fonctions $\hat{\forall}$ et $\hat{\exists}$ de $\wp^{+}(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}$ où $\wp^{+}(\mathcal{B})$ est l'ensemble des parties non vides de $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage et $\mathcal{M}$ un modèle de ce langage. On veut définir une fonction $[\![\ ]\!]$ qui associe, à chaque terme terme t de sorte s, un élément $[\![t]\!]$ de $\mathcal{M}_s$ et, à chaque proposition A, un élément $[\![A]\!]$ de $\mathcal{B}$. On veut, en outre, que cette fonction soit un morphisme, c'est-à-dire que $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!] = \hat{f}([\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!])$, $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!] = \hat{P}([\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!])$, $[\![A \wedge B]\!] = \hat{\wedge}([\![A]\!], [\![B]\!])$, … On sait qu'un morphisme d'espaces vectoriels est complètement défini par son image sur une base de l'espace de départ. De même, un morphisme entre un langage et un modèle est complètement défini par son image sur les variables. Cela mène à la définition suivante.

Définition 2.2 (Valuation)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage, $\mathcal{M}$ un modèle de ce langage et $(\mathcal{V}_s)_{s \in \mathcal{S}}$ une famille d'ensembles de variables. On appelle *valuation* une fonction de domaine fini qui associe aux variables $x_1, \ldots, x_n$ de sortes $s_1, \ldots, s_n$ des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathcal{M}_{s_1}, \ldots, \mathcal{M}_{s_n}$.

La valuation qui lie l'élément a_1 à la variable $x_1, \ldots, a_n$ à la variable x_n s'écrit $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. Si ϕ est une valuation, x une variable et a un élément de $\mathcal{M}$ on note $(\phi, x = a)$ la valuation qui prend la même valeur que ϕ partout sauf en x où elle vaut a.

Une valuation se prolonge naturellement en un morphisme $[\![\ ]\!]_\phi$ entre les termes et propositions du langage $\mathcal{L}$ dont les variables libres sont dans le domaine de ϕ et le modèle $\mathcal{M}$, en définissant $[\![x]\!]_\phi$ comme $\phi(x)$, $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\phi$ comme $\hat{f}([\![t_1]\!]_\phi, \ldots, [\![t_n]\!]_\phi)$, … En fait, les quantificateurs et les variables liées compliquent un tout petit peu la définition. En effet, les variables libres de la proposition A sont toutes celles de $\forall x\ A$ plus, potentiellement, x. Pour définir $[\![\forall x\ A]\!]_\phi$, on doit donc commencer par considérer toutes les valeurs $[\![A]\!]_{\phi, x=a}$ obtenues en associant à x un élément quelconque a de $\mathcal{M}_s$, on obtient alors un sous-ensemble non vide de $\mathcal{B}$ auquel on applique la fonction $\hat{\forall}$, qui doit donc être une fonction de l'ensemble des parties non vides de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

Définition 2.3 (Dénotation)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage, $\mathcal{M}$ un modèle de ce langage, $(\mathcal{V}_s)_{s \in \mathcal{S}}$ une famille d'ensembles de variables, ϕ une valuation et t un terme dont les variables libres sont dans le domaine de ϕ, la *dénotation* du terme t dans le modèle $\mathcal{M}$ pour la valuation ϕ est l'élément $[\![t]\!]_\phi$ de $\mathcal{M}_s$ ainsi défini par récurrence sur la structure de t

- $[\![x]\!]_\phi = \phi(x)$,
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\phi = \hat{f}([\![t_1]\!]_\phi, \ldots, [\![t_n]\!]_\phi)$.

Soit A une proposition dont les variables libres sont dans le domaine de ϕ, la *dénotation* de la proposition A dans le modèle $\mathcal{M}$ pour la valuation ϕ est l'élément $[\![A]\!]_\phi$ de $\mathcal{B}$ ainsi défini par récurrence sur la structure de A

- $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\phi = \hat{P}([\![t_1]\!]_\phi, \ldots, [\![t_n]\!]_\phi)$,
- $[\![\top]\!]_\phi = \hat{\top}$,
- $[\![\bot]\!]_\phi = \hat{\bot}$,
- $[\![\neg A]\!]_\phi = \hat{\neg}([\![A]\!]_\phi)$,
- $[\![A \wedge B]\!]_\phi = \hat{\wedge}([\![A]\!]_\phi, [\![B]\!]_\phi)$,
- $[\![A \vee B]\!]_\phi = \hat{\vee}([\![A]\!]_\phi, [\![B]\!]_\phi)$,
- $[\![A \Rightarrow B]\!]_\phi = \hat{\Rightarrow}([\![A]\!]_\phi, [\![B]\!]_\phi)$,
- $[\![\forall x\ A]\!]_\phi = \hat{\forall}(\{[\![A]\!]_{\phi, x=a} \mid a \in \mathcal{M}_s\})$,
- $[\![\exists x\ A]\!]_\phi = \hat{\exists}(\{[\![A]\!]_{\phi, x=a} \mid a \in \mathcal{M}_s\})$.

Proposition 2.1 (Substitution)

$$[\![(u/x)t]\!]_\phi = [\![t]\!]_{\phi, x=[\![u]\!]_\phi}$$
$$[\![(u/x)A]\!]_\phi = [\![A]\!]_{\phi, x=[\![u]\!]_\phi}$$

Démonstration. Par récurrence sur la structure de t et sur celle de A.

Définition 2.4 (Validité)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage, $\mathcal{M}$ un modèle de ce langage, $(\mathcal{V}_s)_{s \in \mathcal{S}}$ une famille d'ensembles de variables. Une proposition close est *valide* dans le modèle $\mathcal{M}$ si $[\![A]\!]_\emptyset$ appartient à l'ensemble $\mathcal{B}^+$. On dit aussi dans ce cas que $\mathcal{M}$ *est un modèle* de A.

Une proposition A qui contient les variables libres $x_1, \ldots, x_n$ est *valide* dans le modèle $\mathcal{M}$ si la proposition close $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ A$ l'est, c'est-à-dire si pour toute valuation ϕ, dont le domaine contient les variables $x_1, \ldots, x_n$, $[\![A]\!]_\phi$ appartient à l'ensemble $\mathcal{B}^+$.

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_p$ est *valide* dans le modèle $\mathcal{M}$ si la proposition $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_p)$ l'est.

Une théorie $\mathcal{T}$ est *valide* dans un modèle si tous ses axiomes le sont.

Définition 2.5 (Modèle bivalué)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage. Un modèle *bivalué* de $\mathcal{L}$ est un modèle dans lequel $\mathcal{B} = \{0,1\}$, $\mathcal{B}^+ = \{1\}$, $\hat{\top} = 1$, $\hat{\bot} = 0$ et $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$, $\hat{\Rightarrow}$ $\hat{\forall}$ et $\hat{\exists}$ sont les fonctions

$\hat{\neg}$	0	1
	1	0

$\hat{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\hat{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\hat{\Rightarrow}$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\hat{\forall}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$
	0	0	1

$\hat{\exists}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$
	0	1	1

Dans la suite de ce livre, tous les modèles seront bivalués.

Exercice 2.1

On considère le langage à une sorte de termes formé d'un symbole de fonction binaire $+$ et d'un symbole de prédicat binaire $=$. Soit $\mathcal{M}_1$ le modèle formé de l'ensemble $\mathbb{N}$, de l'addition sur $\mathbb{N}$ et de la fonction caractéristique de l'égalité sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire de la fonction $\hat{=}$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\{0,1\}$ telle que $\hat{=}(n,p) = 1$ si $n = p$ et $\hat{=}(n,p) = 0$ sinon. La proposition $\forall x \forall y \exists z\ (x + z = y)$ est-elle valide dans ce modèle ?

Même question pour le modèle $\mathcal{M}_2$ formé de l'ensemble $\mathbb{Z}$ de l'addition et de la fonction caractéristique de l'égalité sur $\mathbb{Z}$.

La proposition $\forall x \forall y\ (x+y = y+x)$ est-elle valide dans $\mathcal{M}_1$? Et dans $\mathcal{M}_2$? Donner un exemple de modèle dans lequel cette proposition n'est pas valide.

2.2 Le théorème de correction

Un intérêt de la notion de modèle est que la validité dans un modèle est un invariant de la démontrabilité : tous les séquents démontrables sont donc valides dans tous les modèles. De ce fait, si une proposition est démontrable dans une théorie, alors elle est valide dans tous les modèles de cette théorie. Cela donne une méthode pour montrer qu'une proposition n'est pas démontrable dans une certaine théorie : il suffit de montrer qu'il existe un modèle de cette théorie dans lequel elle n'est pas valide. Ce principe est exprimé par la deuxième forme du théorème de correction ci-après.

Proposition 2.2

Si un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_p$ est démontrable en déduction naturelle, alors il est valide dans tous les modèles.

Démonstration. Par récurrence sur la structure des démonstrations.

De cette proposition, on peut déduire le théorème de correction qui peut se formuler sous trois formes équivalentes.

Théorème 2.1 (Correction)

Soit $\mathcal{T}$ une théorie et A une proposition.

1. Si A est démontrable dans $\mathcal{T}$, alors A est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.
2. S'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A, alors A n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$.
3. Si $\mathcal{T}$ a un modèle, alors $\mathcal{T}$ est cohérente.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de la théorie $\mathcal{T}$ et A une proposition démontrable dans $\mathcal{T}$. Il existe un sous-ensemble fini $H_1, \ldots, H_n$ de $\mathcal{T}$, tel que le séquent $H_1, \ldots, H_n \vdash A$ soit démontrable. D'après la proposition 2.2, ce séquent est valide dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire que la proposition $(H_1 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow A$ est valide dans ce modèle. Les propositions $H_1, \ldots H_n$ étant valides dans $\mathcal{M}$ on en déduit que A également est valide dans $\mathcal{M}$, ce qui montre la proposition (1.) La proposition (2.) est une conséquence triviale de (1.) et la proposition (3.) est une conséquence de (2.), en prenant $A = \bot$.

Exercice 2.2

Soit la théorie formée de l'axiome $P(c) \vee Q(c)$. Montrer que la proposition $P(c)$ n'est pas démontrable dans cette théorie. Montrer que la proposition $\neg P(c)$ n'est pas démontrable non plus. Qu'en est-il de la proposition $Q(c)$?

On peut utiliser le théorème de correction pour démontrer que l'axiome de l'infini n'est pas démontrable à partir des autres axiomes ZF.

Définition 2.6 (L'ensemble des ensembles héréditairement finis)

Soit V_n la suite d'ensembles définie par récurrence par $V_0 = \varnothing$ et $V_{i+1} = \wp(V_i)$. Soit $V_\omega = \cup_i V_i$.

Proposition 2.3

Soit le modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_\iota, \mathcal{M}_\sigma, \hat{\epsilon}_2, \hat{=}, \hat{\in})$ où $\mathcal{M}_\iota = V_\omega$, $\mathcal{M}_\sigma = \wp(\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota)$, $\hat{\epsilon}_2$ la fonction de $\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\sigma$ dans $\{0,1\}$ telle que $\hat{\epsilon}_2(a,b,c) = 1$ si (a,b) appartient à c et $\hat{\epsilon}_2(a,b,c) = 0$ sinon, $\hat{=}$ la fonction de $\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota$ dans $\{0,1\}$ telle que $\hat{=}(a,b) = 1$ si $a = b$ et $\hat{=}(a,b) = 0$ sinon, $\hat{\in}$ la fonction de $\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota$ dans $\{0,1\}$ telle que $\hat{\in}(a,b) = 1$ si a appartient à b et $\hat{\in}(a,b) = 0$ sinon.

Le modèle $\mathcal{M}$ est un modèle de tous les axiomes de ZF sauf l'axiome de l'infini.

Démonstration. On montre, par exemple, que c'est un modèle de l'axiome de la réunion. Remarquons tout d'abord que la réunion d'une famille de parties de V_j étant une partie de V_j, la réunion d'une famille d'éléments de V_{j+1} est un élément de V_{j+1}. On montre ensuite que, si c est un élément de V_ω, la réunion $\bigcup_{b\in c} b$ des éléments de c appartient également à V_ω. Comme $c \in V_\omega$, il existe, par définition de V_ω, un entier i non nul tel que $c \in V_i$. Si $i = 1$, $c = \varnothing$ et la réunion des éléments de c est également l'ensemble vide, c'est donc un élément de V_ω. Sinon, il existe un entier j tel que $i = j + 2$. On a $c \in V_{j+2}$, donc $c \subseteq V_{j+1}$ et les éléments de c appartiennent à V_{j+1}. C'est donc aussi le cas de la réunion des éléments de c, qui appartient donc à V_ω. On a donc

$$[\![\forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (\exists v\ (w \in v \wedge v \in x)))]\!]_{x=c, z=\bigcup_{b\in c} b} = 1$$

et donc

$$[\![\forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (\exists v\ (w \in v \wedge v \in x)))]\!] = 1$$

On montre de même que l'axiome d'extensionalité, l'axiome des parties et l'axiome de remplacement sont valides dans ce modèle.

Les axiomes de l'égalité et le schéma de compréhension binaire sont trivialement valides dans ce modèle.

On montre enfin, par l'absurde, que l'axiome de l'infini n'est pas valide dans ce modèle. On commence par montrer, par récurrence sur i, que tous les éléments de V_i sont des ensembles finis. On en déduit que tous les éléments de V_ω sont des ensembles finis.

Si l'axiome de l'infini était valide dans V_ω, il existerait un ensemble a dans V_ω qui contient l'ensemble vide et qui contient l'ensemble $b \cup \{b\}$ chaque fois qu'il contient un ensemble b. Cet ensemble contiendrait donc tous les éléments de la suite définie par récurrence par : $e_0 = \varnothing, e_1 = \{e_0\}, e_2 = \{e_0, e_1\}, e_3 = \{e_0, e_1, e_2\}, \ldots, e_{i+1} = e_i \cup \{e_i\}, \ldots$ Ces éléments étant tous distincts, l'ensemble a serait infini.

Proposition 2.4

L'axiome de l'infini n'est pas démontrable à partir des autres axiomes de ZF.

Démonstration. Tous les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini, sont valides dans le modèle $\mathcal{M}$ de la proposition 2.3.

2.3 Le théorème de complétude

Nous avons vu que, d'après le théorème de correction, si une proposition A est démontrable dans une théorie $\mathcal{T}$, alors elle est valide dans tous les modèles de cette théorie. Le théorème de complétude, démontré par K. Gödel en 1930, mais qui n'est pas le célèbre théorème de Gödel, est la réciproque de ce théorème.

2.3.1 Les trois formes du théorème de complétude

Comme le théorème de correction, le théorème de complétude peut se formuler sous trois formes équivalentes.

Théorème 2.2 (Complétude)

Soit $\mathcal{T}$ une théorie et A une proposition.

1. Si A est valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A est démontrable dans $\mathcal{T}$.
2. Si A n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A.
3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle.

Les formes (1.) et (2.) sont trivialement équivalentes. La forme (3.) est une conséquence de (2.) en prenant $A = \bot$. Montrons que la forme (2.) est une conséquence de (3.). Considérons une théorie $\mathcal{T}$ et une proposition A qui n'est pas démontrable dans cette théorie. D'après la proposition 1.7, la proposition $\bot$ n'est pas démontrable dans la théorie $\mathcal{T}, \neg A$. D'après (3.), la théorie $\mathcal{T}, \neg A$ a donc un modèle. Ce modèle est un modèle de $\mathcal{T}$, mais pas un modèle de A.

2.3.2 La démonstration du théorème de complétude

Nous allons démontrer le théorème de complétude dans sa forme (3.) et nous restreindre au cas d'un langage fini ou dénombrable.

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un tel langage et $\mathcal{T}$ une théorie cohérente dans ce langage. Nous devons construire un modèle de cette théorie. L'idée est de définir le domaine $\mathcal{M}_s$ comme l'ensemble des termes clos de sorte s, de définir la fonction $\hat{f}$ comme la fonction qui aux termes clos $t_1, \ldots, t_n$ associe le terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ et de définir la fonction $\hat{P}$ comme la fonction qui à $t_1, \ldots, t_n$ associe 1 ou 0 selon que la proposition $P(t_1, \ldots, t_n)$ est démontrable ou non.

Cependant, même en supposant la théorie $\mathcal{T}$ cohérente, le modèle ainsi construit n'est pas toujours un modèle de cette théorie. Si la théorie $\mathcal{T}$ est constituée, par exemple, d'un seul axiome $P(c) \vee Q(c)$, ni la proposition $P(c)$ ni la proposition $Q(c)$ ne sont démontrables — voir l'exercice 2.2. Donc, en suivant la construction ci-avant, nous serons amenés à poser $\hat{P}(c) = 0$ et $\hat{Q}(c) = 0$. Ainsi, la proposition $P(c) \vee Q(c)$ ne sera pas valide dans ce modèle.

Pour que cette construction fonctionne, il est donc nécessaire, dans un premier temps, de compléter la théorie : quand une proposition A est indéterminée, c'est-à-dire que ni A ni $\neg A$ ne sont démontrables, il faut faire un choix et ajouter l'axiome A ou l'axiome $\neg A$. Si, dans cet exemple, on ajoute l'axiome $P(c)$ alors, en construisant le modèle, on sera amené à poser $\hat{P}(c) = 1$ et, de ce fait, la proposition $P(c) \vee Q(c)$ sera valide dans le modèle. Si, en revanche, on pose l'axiome $\neg P(c)$, alors la proposition $Q(c)$ devient démontrable, en construisant le modèle, on sera amené à poser $\hat{Q}(c) = 1$ et la proposition $P(c) \vee Q(c)$ sera donc encore valide.

Toutefois, compléter ainsi la théorie n'est pas suffisant. Par exemple, pour la théorie $\neg P(c), \exists x\ P(x)$, la construction ci-avant nous mène à poser $\mathcal{M} = \{c\}$ et $\hat{P}(c) = 0$. La proposition $\exists x\ P(x)$ n'est donc pas valide dans ce modèle. Le problème est ici qu'il n'y a pas de terme clos témoin du fait qu'il existe un objet qui vérifie la propriété P. Il est donc nécessaire, avant de construire le modèle ci-avant d'ajouter une constante d et l'axiome $P(d)$. Cette constante d s'appelle le *témoin de Henkin* de la proposition $\exists x\ P(x)$.

La démonstration du théorème de complétude demande donc de montrer d'abord la proposition suivante.

Proposition 2.5

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage et $\mathcal{T}$ une théorie cohérente dans ce langage. Il existe un langage $\mathcal{L}'$ tel que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ et une théorie $\mathcal{U}$ dans le langage $\mathcal{L}'$ telle que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ et qui vérifie les propriétés suivantes.

1. La théorie $\mathcal{U}$ est cohérente.
2. Pour toute proposition close A dans le langage $\mathcal{L}'$, la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$ ou la proposition $\neg A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$.
3. Si la proposition $\exists x\ A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors il existe une constante c telle que $(c/x)A$ soit démontrable dans $\mathcal{U}$.

La démonstration de cette proposition est similaire à celle du théorème de la base incomplète : on examine les propositions une par une de manière à sélectionner certaines d'entre elles. Quand on examine la proposition A, on se demande si A ou $\neg A$ sont démontrables à partir des axiomes de $\mathcal{T}$ et des propositions déjà sélectionnées. Si A est démontrable, on la sélectionne. Si $\neg A$ est démontrable, on la sélectionne. Si ni A ni $\neg A$ ne sont démontrables, alors on sélectionne arbitrairement A. Si en outre A a la forme $\exists x\ B$, alors on sélectionne également la proposition $(c/x)B$ où c est une nouvelle constante que l'on ajoute au langage.

Démonstration. Soit $\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ un ensemble dénombrable contenant une infinité de constantes $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \ldots$ de chaque sorte s. Soit $\mathcal{L}'$ le langage $(\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$.

Le langage $\mathcal{L}'$ et les ensembles $\mathcal{V}_s$ étant dénombrables, l'ensemble des propositions de ce langage est dénombrable. Soit $A_0, A_1, A_2, \ldots$ une énumération de cet ensemble. On définit la famille de théories $\mathcal{U}_n$ ainsi. On pose $\mathcal{U}_0 = \mathcal{T}$. Si A_n est démontrable dans la théorie $\mathcal{U}_n$, alors on pose $B = A_n$, si $\neg A_n$ est démontrable dans la théorie $\mathcal{U}_n$, alors on pose $B = \neg A_n$ et si ni A_n ni $\neg A_n$ ne sont démontrables dans la théorie $\mathcal{U}_n$, alors on pose arbitrairement $B = A_n$. Si B n'a pas la forme $\exists x\ C$, alors on pose $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n \cup \{B\}$ et si B a la forme $\exists x\ C$, alors on pose $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n \cup \{B, (c_i^s/x)C\}$, où s est la sorte de x et i est le plus petit entier tel que la constante c_i^s n'apparaisse pas dans $\mathcal{U}_n$ ni dans B. Une telle constante existe toujours, car seules un nombre fini de constantes de $\mathcal{H}$ apparaissent dans chaque $\mathcal{U}_i$. Enfin, on pose $\mathcal{U} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$.

On montre par récurrence sur i que toutes les théories $\mathcal{U}_i$ sont cohérentes. On en déduit que la théorie $\mathcal{U}$, elle-même, est cohérente. En effet, s'il existait une démonstration de $\perp$ dans $\mathcal{U}$, il existerait un sous-ensemble fini $B_1, \ldots, B_n$ de $\mathcal{U}$ tel que le séquent $B_1, \ldots, B_n \vdash \perp$ soit démontrable. Chaque proposition B_j appartiendrait à un ensembles $\mathcal{U}_{i_j}$ et toutes appartiendraient à $\mathcal{U}_k$ où k est le plus grand des i_j. La théorie $\mathcal{U}_k$ serait donc contradictoire, ce qui n'est pas le cas.

Soit A une proposition close quelconque. Il existe un indice i tel que $A_i = A$ et l'une des propositions A ou $\neg A$ est un élément de $\mathcal{U}_{i+1}$. De ce fait, la théorie $\mathcal{U}$ contient l'axiome A ou l'axiome $\neg A$ et démontre donc l'une de ces propositions.

Enfin, si la proposition $\exists x\ A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors il existe un indice i tel que $A_i = \exists x\ A$. Comme la théorie $\mathcal{U}_i$ est cohérente et démontre la proposition A_i, elle ne démontre pas la proposition $\neg A_i$. De ce fait, $\mathcal{U}_{i+1} = \mathcal{U}_i \cup \{\exists x\ A, (c/x)A\}$ pour une certaine constante c. La théorie $\mathcal{U}$ contient donc l'axiome $(c/x)A$ et démontre donc cette proposition.

Proposition 2.6

Soit $\mathcal{U}$ une théorie qui vérifie les propriétés suivantes.

1. La théorie $\mathcal{U}$ est cohérente.
2. Pour toute proposition close A, la proposition A ou la proposition $\neg A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$.
3. Si la proposition $\exists x\ A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors il existe un terme clos t telle que la proposition $(t/x)A$ soit démontrable dans $\mathcal{U}$.

Alors

- La proposition $\neg A$ est démontrable si et seulement si la proposition A n'est pas démontrable dans $\mathcal{U}$.
- La proposition $A \wedge B$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement si la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$ et la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$.
- La proposition $A \vee B$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement si la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$ ou la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$.
- La proposition $A \Rightarrow B$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement si si la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$.
- La proposition $\forall x\ A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement pour tout terme clos t, la proposition $(t/x)A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$.
- La proposition $\exists x\ A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement s'il existe un terme clos t, tel que la proposition $(t/x)A$ soit démontrable dans $\mathcal{U}$.

Démonstration.

- Si la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$, la théorie $\mathcal{U}$ étant cohérente, la proposition $\neg A$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{U}$. Réciproquement, d'après la deuxième condition, si la proposition $\neg A$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{U}$, la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$.
- Si les propositions A et B sont démontrables dans $\mathcal{U}$ alors la proposition $A \wedge B$ l'est également en utilisant de la règle $\wedge$-intro. Réciproquement, si la proposition $A \wedge B$ est démontrable dans $\mathcal{U}$, les propositions A et B le sont également, en utilisant de la règle $\wedge$-élim.
- Si la proposition A ou la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors la proposition $A \vee B$ l'est également, en utilisant la règle $\vee$-intro. Réciproquement, si la proposition $A \vee B$ est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors, d'après la deuxième condition, la proposition A ou la proposition $\neg A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$. Dans le premier cas, la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$, dans le second, comme les proposition $A \vee B$ et $\neg A$ sont démontrables, la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$ avec les règles *axiome*, $\neg$-élim, $\perp$-élim et $\vee$-élim.
- Supposons que si la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$ alors la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$. Dans ce cas, d'après la deuxième

condition, ou bien la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$ ou bien la proposition $\neg A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$. Dans le premier cas, la proposition B est démontrable dans $\mathcal{U}$ et donc la proposition $A \Rightarrow B$ est démontrable avec la règle $\Rightarrow$-intro. Dans le second, la proposition $\neg A$ est démontrable et donc la proposition $A \Rightarrow B$ est démontrable avec les règles $\Rightarrow$-intro, $\bot$-élim et $\neg$-élim. Réciproquement, si $A \Rightarrow B$ est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors, si A est démontrable dans $\mathcal{U}$, alors B est démontrable dans $\mathcal{U}$ avec la règle $\Rightarrow$-élim.
- Supposons que pour tout terme clos t, la proposition $(t/x)A$ soit démontrable dans $\mathcal{U}$. Si la proposition $\exists x\ \neg A$ était démontrable dans $\mathcal{U}$, alors, d'après la troisième condition, il existerait un terme clos t telle que $\neg(t/x)A$ soit démontrable. La théorie $\mathcal{U}$ serait alors contradictoire. La proposition $\exists x\ \neg A$ n'est donc pas démontrable dans $\mathcal{U}$ et donc la proposition $\neg\exists x\ \neg A$ l'est. La proposition $\forall x\ A$ est donc démontrable d'après la proposition 1.8. Réciproquement, si la proposition $\forall x\ A$ est démontrable dans la théorie $\mathcal{U}$, toutes les propositions $(t/x)A$ sont démontrables avec la règle $\forall$-élim.
- S'il existe un terme clos t, tel que la proposition $(t/x)A$ soit démontrable dans $\mathcal{U}$ alors, la proposition $\exists x\ A$ est démontrable avec la règle $\exists$-intro. Réciproquement, si la proposition $\exists x\ A$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ alors, d'après la troisième condition, il existe un terme clos t telle que $(t/x)A$ soit démontrable dans $\mathcal{U}$.

On peut enfin démontrer le théorème de complétude.

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ une théorie cohérente et $\mathcal{U}$ la théorie construite à la proposition 2.5. On définit le domaine $\mathcal{M}_s$ comme l'ensemble des termes clos de sorte s du langage $\mathcal{L}'$, on définit la fonction $\hat{f}$ comme la fonction qui aux termes clos $t_1, \ldots, t_n$ associe le terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ et la fonction $\hat{P}$ comme la fonction qui à $t_1, \ldots, t_n$ associe 1 ou 0 selon que la proposition $P(t_1, \ldots, t_n)$ est démontrable dans $\mathcal{U}$ ou non.

Soit A une proposition close. On démontre par récurrence sur la structure de la proposition A que A est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement si A est valide dans ce modèle. Si A est une proposition atomique, l'équivalence est une simple conséquence de la définition des fonctions $\hat{P}$. Si A est de la forme $B \wedge C$, la proposition A est démontrable dans $\mathcal{U}$ si et seulement si les propositions B et C le sont également — proposition 2.6 — si et seulement si les propositions B et C sont valides dans $\mathcal{M}$ — hypothèse de récurrence — si et seulement si la proposition A est valide dans $\mathcal{M}$. On procède de même dans les autres cas.

Dans cette démonstration, on s'est restreint au cas des langages finis ou dénombrables. Le théorème de complétude s'étend aux langages non dénombrables et l'esprit de la démonstration est identique. La seule différence est dans la démonstration de la proposition 2.5. On doit tout d'abord ajouter un ensemble de constantes de chaque sorte, non pas dénombrable, mais de même cardinal que le langage. Ensuite, au lieu d'énumérer les propositions, il est nécessaire de bien les ordonner, en utilisant l'axiome du choix. Enfin, la famille d'ensembles $(\mathcal{U}_i)_i$ n'est plus indexée par les entiers, mais par un ordinal plus grand.

2.3.3 Les modèles égalitaires

Définition 2.7 (Modèle égalitaire)

Soit $\mathcal{L}$ un langage qui contient des prédicats $=_s$ de sorte (s, s) pour certaines sortes s et $\mathcal{T}$ une théorie qui contient au moins les axiomes de l'égalité pour ces sortes. On appelle *modèle égalitaire* de la théorie $\mathcal{T}$ un modèle dans lequel les fonctions $\hat{=}_s$ sont les fonctions définies sur $\mathcal{M}_s$ par $\hat{=}_s(x, y) = 1$ si $x = y$ et $\hat{=}_s(x, y) = 0$ sinon.

Proposition 2.7 (Complétude pour les modèles égalitaires)

Soit une théorie $\mathcal{T}$ contenant au moins les axiomes de l'égalité, alors si $\mathcal{T}$ est cohérente, elle a un modèle égalitaire.

Démonstration. La théorie étant cohérente, elle a un modèle $\mathcal{M}$. Sur les sortes s munies d'un prédicat d'égalité, on définit la relation R_s qui relie a et b quand $\hat{=}(a, b) = 1$. Cette relation est une relation d'équivalence. On pose $\mathcal{M}'_s = \mathcal{M}_s/R_s$. Le modèle $\mathcal{M}$ étant un modèle des axiomes de l'égalité, toutes fonctions $\hat{f}$ et $\hat{P}$ passent au quotient. On définit ainsi un modèle égalitaire $\mathcal{M}'$ qui valide les mêmes propositions que $\mathcal{M}$. C'est donc un modèle de $\mathcal{T}$.

2.3.4 Les démonstrations de cohérence relative

Une application importante du théorème de complétude est qu'il permet de faire des démonstrations de *cohérence relative*. Le modèle V_ω construit à la section 2.2 est un modèle de la théorie ZF^f, c'est-à-dire de la théorie formée des mêmes axiomes que ZF mais dans laquelle l'axiome de l'infini a été remplacé par sa négation. La construction de ce modèle peut se formaliser dans ZF, c'est-à-dire que la proposition « Il existe un modèle de ZF^f » est démontrable dans ZF. D'après le théorème de correction, on peut en déduire que la proposition « La théorie ZF^f est cohérente » est démontrable dans ZF.

Cette situation est cependant exceptionnelle. Si, au lieu de cet exemple élémentaire de ZF^f, on considère les exemples plus intéressants de ZFC ou de $ZF\neg C$ obtenus en ajoutant aux axiomes de ZF respectivement l'axiome du choix et sa négation, alors, une conséquence du second théorème d'incomplétude de Gödel — qui ne sera pas abordé dans ce livre, mais qui montre que sous des conditions assez générales, la cohérence d'une théorie ne peut pas être démontrée dans cette même théorie — est qu'il est impossible de démontrer, dans ZF, la cohérence de ZF et *a fortiori* celle de ZFC ou $ZF\neg C$.

En revanche, il est possible de démontrer dans ZF des théorèmes de cohérence relative. Ainsi, K. Gödel a démontré que si la théorie ZF est cohérente, alors la théorie ZFC également et A. Fraenkel et A. Mostowski que si la théorie ZF est cohérente, alors la théorie $ZF\neg C$ également.

Autrement dit, pour démontrer la cohérence des théories ZFC et $ZF\neg C$, on ajoute l'axiome « La théorie ZF est cohérente » aux mathématiques ordinaires, formalisables dans ZF. Ensuite, ces démonstrations utilisent le théorème de complétude, pour déduire, de la cohérence de ZF, l'existence d'un modèle de ZF, puis elles construisent un modèle de ZFC ou $ZF\neg C$ en utilisant ce modèle.

Exercice 2.3

Dans cet exercice, inspiré de la démonstration de Fraenkel et Mostowski de la cohérence relative de $ZF\neg C$, on montre que si ZF est cohérente, alors ZF^+ est cohérente, où ZF^+ est la théorie obtenue en ajoutant à ZF l'axiome $\exists x\ (x \in x)$. Autrement dit, si ZF est cohérente, alors elle ne démontre pas la proposition $\neg\exists x\ (x \in x)$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
   (a) Si ZF est cohérente alors ZF^+ est cohérente.
   (b) Si ZF a un modèle alors ZF^+ a un modèle.
   (c) Si ZF a un modèle égalitaire alors ZF^+ a un modèle égalitaire.

   On se propose de démontrer la proposition (c). Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \mathcal{C}, \hat{\epsilon}_2, \hat{\in})$ un modèle égalitaire de ZF.

2. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}$ un élément 0 tel que l'on n'ait $a \mathrel{\hat{\in}} 0$ pour aucun élément a de $\mathcal{M}$. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}$ un élément 1 tel que pour tout élément a de $\mathcal{M}$, on ait $a \mathrel{\hat{\in}} 1$ si et seulement si $a = 0$.

   Soit f la bijection de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(a) = a$ si a est distinct de 0 et 1. Soit $\mathcal{M}'$ le modèle $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \hat{\epsilon}_2, \hat{\in}')$ où $\hat{\in}'$ est la relation définie par $a \mathrel{\hat{\in}'} b$ si et seulement si $a \mathrel{\hat{\in}} f(b)$. On veut montrer que $\mathcal{M}'$ est un modèle égalitaire de ZF^+.

3. Montrer qu'il existe une proposition *Zéro* telle que $[\![\mathit{Zéro}]\!]^{\mathcal{M}}_{x=a} = 1$ si et seulement si $a = 0$. Montrer qu'il existe une proposition *Un* telle que

$[\![Un]\!]^{\mathcal{M}}_{x=a} = 1$ si et seulement si $a = 1$. Montrer qu'il existe une proposition F telle que $[\![F]\!]^{\mathcal{M}}_{x=a,y=b} = 1$ si et seulement si $b = f(a)$. Montrer qu'il existe une proposition E telle que $[\![E]\!]^{\mathcal{M}}_{x=a,y=b} = 1$ si et seulement si $a \mathrel{\hat{\in}'} b$. Montrer que $\mathcal{M}'$ est un modèle du schéma de compréhension des classes binaires.

4. Montrer que l'axiome d'extensionalité est valide dans $\mathcal{M}'$.
5. Soit a un élément de $\mathcal{M}$. On pose $a_1 = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément a_2 de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}} a_2$ si et seulement s'il existe un y tel que $x = f(y)$ et $y \mathrel{\hat{\in}} a_1$. Montrer qu'il existe un élément a_3 de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}} a_3$ si et seulement s'il existe un z tel que $x \mathrel{\hat{\in}} z$ et $z \mathrel{\hat{\in}} a_2$. Soit $a_4 = f^{-1}(a_3)$. Montrer que $x \mathrel{\hat{\in}'} a_4$ si et seulement s'il existe un y tel que $x \mathrel{\hat{\in}'} y$ et $y \mathrel{\hat{\in}'} a$. Montrer que l'axiome de la réunion est valide dans $\mathcal{M}'$.
6. Soit a un élément de $\mathcal{M}$. On pose $a_1 = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément a_2 de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}} a_2$ si et seulement si pour tout z, $z \mathrel{\hat{\in}} x$ implique $z \mathrel{\hat{\in}} a_1$. Montrer qu'il existe un élément a_3 de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}} a_3$ si et seulement $f(x) \mathrel{\hat{\in}} a_2$. Soit $a_4 = f^{-1}(a_3)$. Montrer que $x \mathrel{\hat{\in}'} a_4$ si et seulement si pour tout z, $z \mathrel{\hat{\in}'} x$ implique $z \mathrel{\hat{\in}'} a$. Montrer que l'axiome de l'ensemble des parties est valide dans $\mathcal{M}'$.
7. Soit a un élément de $\mathcal{M}$ et r un élément de $\mathcal{C}$ qui est une classe binaire fonctionnelle, c'est-à-dire tel que si $a, b \ \hat{\epsilon}_2\ r$ et $a, b' \ \hat{\epsilon}_2\ r$ alors $b = b'$. On pose $a_1 = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément a_2 de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}} a_2$ si et seulement s'il existe un y tel que $y \mathrel{\hat{\in}} a_1$ et $y, x \ \hat{\epsilon}_2\ r$. Soit $a_3 = f^{-1}(a_2)$. Montrer que $x \mathrel{\hat{\in}'} a_3$ si et seulement s'il existe un y tel que $y \mathrel{\hat{\in}'} a$ et $y, x \ \hat{\epsilon}_2\ r$. Montrer que l'axiome de remplacement est valide dans $\mathcal{M}'$.
8. Dans cette question on admettra le résultat suivant, démontré à l'exercice 1.18 : *Si a est un élément de $\mathcal{M}$ et r un élément de $\mathcal{C}$ qui est une classe binaire fonctionnelle, alors il existe un élément E de $\mathcal{M}$ tel que $a \mathrel{\hat{\in}} E$ et si $x \mathrel{\hat{\in}} E$ et $x, x' \ \hat{\epsilon}_2\ r$ alors $x' \mathrel{\hat{\in}} E$.*

   Montrer que il n'existe pas d'objet a tel que $a \mathrel{\hat{\in}'} 1$.

   Soit a un élément de $\mathcal{M}$. Soit $S(a)$ l'élément de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}} S(a)$ si et seulement si $x \mathrel{\hat{\in}} a$ ou $x = a$ et $S'(a)$ l'élément de $\mathcal{M}$ tel que $x \mathrel{\hat{\in}'} S'(a)$ si et seulement si $x \mathrel{\hat{\in}'} a$ ou $x = a$. Montrer que si a n'est ni 0 ni 1, alors $S'(a) = S(a)$. Quel est l'objet $S'(0)$? Et l'objet $S'(1)$? Montrer que la classe binaire r telle que $a, b \ \hat{\epsilon}_2\ r$ si $b = S'(a)$ appartient à $\mathcal{C}$ et qu'elle est fonctionnelle.

   Montrer qu'il existe un ensemble I' qui contient 1 et tel que si $a \mathrel{\hat{\in}} I'$ alors $S'(a) \mathrel{\hat{\in}} I'$.

   Montrer que l'axiome de l'infini est valide dans $\mathcal{M}'$.
9. Montrer que $0 \mathrel{\hat{\in}'} 0$. Montrer que la proposition $\exists x\ (x \in x)$ est valide dans $\mathcal{M}'$.

2.3.5 La conservativité

Définition 2.8 (Extension)

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages tels que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. Soit $\mathcal{T}$ une théorie exprimée dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}'$ une théorie exprimée dans $\mathcal{L}'$. La théorie $\mathcal{T}'$ est une *extension* de $\mathcal{T}$ si toutes les propositions démontrables dans $\mathcal{T}$ sont démontrables dans $\mathcal{T}'$.

Définition 2.9 (Extension conservatrice)

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages tels que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. Soit $\mathcal{T}$ une théorie exprimée dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}'$ une théorie exprimée dans $\mathcal{L}'$ qui est une extension de $\mathcal{T}$. La théorie $\mathcal{T}'$ est une extension *conservatrice* de $\mathcal{T}$ si toutes les propositions de $\mathcal{L}$ qui sont démontrables dans $\mathcal{T}'$ sont démontrables dans $\mathcal{T}$.

Par exemple, si le langage $\mathcal{L}$ contient une constante c et un symbole de prédicat P et que la théorie $\mathcal{T}$ est formée de l'axiome $P(c)$, alors, en ajoutant une constante d et l'axiome $P(d)$, on obtient une extension conservatrice : certes la proposition $P(d)$ est démontrable dans $\mathcal{T}'$ alors qu'elle ne l'était pas dans $\mathcal{T}$, mais, comme nous allons le voir, toutes les propositions du langage $\mathcal{L}$ — ce qui n'est pas le cas de $P(d)$ — qui sont démontrables dans $\mathcal{T}'$ le sont également dans $\mathcal{T}$.

En revanche, si le langage $\mathcal{L}$ contient une constante c et un symbole de prédicat P et que la théorie $\mathcal{T}$ est vide, alors, en ajoutant une constante d et l'axiome $P(d)$, on obtient une extension qui n'est pas conservatrice, car la proposition $\exists x\ P(x)$, qui est bien formée dans $\mathcal{T}$, est démontrable dans $\mathcal{T}'$ mais pas dans $\mathcal{T}$.

Si cela est possible dans les cas simples comme celui-ci, il est en général difficile de montrer qu'une extension est conservatrice en montrant directement qu'une démonstration dans $\mathcal{T}'$ se traduit en une démonstration dans $\mathcal{T}$. En revanche le théorème de complétude fournit un outil efficace pour montrer qu'une théorie est une extension conservatrice d'une autre.

Définition 2.10 (Extension d'un modèle)

Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages tels que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. Soient $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}'$ un modèle de $\mathcal{L}'$. Le modèle $\mathcal{M}'$ est une *extension* de $\mathcal{M}$ si pour toute sorte s de $\mathcal{L}$ on a $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}'_s$ et pour tout symbole de fonction ou de prédicat f de $\mathcal{L}$ on a $\hat{f}^{\mathcal{M}} = \hat{f}^{\mathcal{M}'}$.

Proposition 2.8

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{T}$ une théorie exprimée dans ce langage. Soit $\mathcal{L}'$ un langage tel que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ et $\mathcal{T}'$ une théorie dans $\mathcal{L}'$ telle que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ il existe une extension $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ qui est un modèle de $\mathcal{T}'$, alors $\mathcal{T}'$ est une extension conservatrice de $\mathcal{T}$.

Démonstration. Soit A une proposition du langage $\mathcal{L}$ qui est démontrable dans $\mathcal{T}'$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle quelconque de $\mathcal{T}$, il existe un modèle $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{T}'$ qui est une extension de $\mathcal{M}$. Le modèle $\mathcal{M}'$ étant un modèle de $\mathcal{T}'$, la proposition A est valide dans $\mathcal{M}'$, donc sa dénotation dans $\mathcal{M}'$ est 1. Comme $\mathcal{M}'$ est une extension de $\mathcal{M}$ la dénotation de A dans $\mathcal{M}$ est la même, c'est-à-dire 1 également. La proposition A est donc valide dans $\mathcal{M}$. La proposition A étant valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, elle est démontrable dans $\mathcal{T}$.

Par exemple, si $\mathcal{L}$ contient c et P et que la théorie $\mathcal{T}$ est formé de l'axiome $P(c)$, en ajoutant une constante d et l'axiome $P(d)$ on obtient une extension conservatrice. En effet, un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ s'étend en un modèle de $\mathcal{T}'$ en posant $\hat{d} = \hat{c}$.

Exercice 2.4

À l'exercice 1.6, nous avons montré que les propositions A et les théories $\mathcal{T}$ exprimées dans un langage à plusieurs sortes de termes pouvaient se relativiser en des propositions $|A|$ et des théories $|\mathcal{T}|$ d'un langage à une seule sorte de termes, de manière à ce que, si la proposition close A est démontrable dans $\mathcal{T}$, alors la proposition $|A|$ est démontrable dans $|\mathcal{T}|$.

Montrer que, réciproquement, si $|A|$ est démontrable dans $|\mathcal{T}|$ alors A est démontrable dans $\mathcal{T}$.

Quand on formule l'arithmétique ou la théorie des ensembles on peut éviter d'utiliser la notion de classe, et donc les sortes κ et σ et les symboles ϵ et ϵ_2, en remplaçant chaque axiome qui utilise les classes par un schéma d'axiome, c'est-à-dire une infinité d'axiomes : par exemple, l'axiome de récurrence est remplacé par le schéma de récurrence qui est l'ensemble contenant, pour chaque proposition A, l'axiome

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \; ((0/y)A \Rightarrow \forall m \; ((m/y)A \Rightarrow (S(m)/y)A) \Rightarrow \forall n \; (n/y)A)$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de A distinctes de y. Par exemple, la proposition $y + 0 = y$ donne l'axiome

$$0 + 0 = 0 \Rightarrow \forall m \; (m + 0 = m \Rightarrow S(m) + 0 = S(m)) \Rightarrow \forall n \; (n + 0 = n)$$

On obtient alors la théorie suivante.

Définition 2.11

Le langage de l'arithmétique contient une constante 0, un symbole de fonction unaire S, deux symboles de fonction binaire $+$ et $\times$ et un symbole de prédicat binaire $=$. Aux axiomes de l'égalité, on ajoute les axiomes

$$\forall x \forall y\ (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x\ \neg(0 = S(x))$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ ((0/y)A \Rightarrow \forall m\ ((m/y)A \Rightarrow (S(m)/y)A) \Rightarrow \forall n\ (n/y)A)$$

$$\forall y\ (0 + y = y)$$

$$\forall x \forall y\ (S(x) + y = S(x + y))$$

$$\forall y\ (0 \times y = 0)$$

$$\forall x \forall y\ (S(x) \times y = (x \times y) + y)$$

On peut montrer que la théorie avec une sorte de termes pour les classes est une extension conservatrice de cette théorie et, plus généralement, qu'une théorie qui contient un schéma d'axiome a une formulation alternative dans la théorie des classes en remplaçant ce schéma par un axiome unique. La notion de schéma d'axiome étant un peu lourde à définir dans le cas général, on montre ce résultat uniquement pour le cas de l'arithmétique.

Proposition 2.9

La formulation de l'arithmétique de la définition 1.33 est une extension conservatrice de celle de la définition 2.11.

Démonstration. Chaque instance du schéma de récurrence peut se démontrer dans la théorie de la définition 1.33. Cette théorie est donc une extension de celle de la définition 2.11. Pour montrer que cette extension est conservatrice, on montre que tout modèle de la théorie de la définition 2.11 s'étend en un modèle de la théorie de la définition 1.33.

Soit $(\mathcal{M}, \hat{0}, \hat{S}, \hat{+}, \hat{\times}, \hat{=})$ un modèle de la théorie de la définition 2.11. Une partie E de $\mathcal{M}$ est dite ***définissable dans l'arithmétique*** s'il existe une proposition A dans le langage de la théorie de la définition 2.11, dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y$ et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathcal{M}$ tels que b appartienne à E si et seulement si

$$[\![A]\!]_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n,y=b} = 1$$

Soit $\overline{\wp}(\mathcal{M})$ l'ensemble des parties définissables de $\mathcal{M}$. On étend le modèle $\mathcal{M}$ en posant $\mathcal{M}_\kappa = \overline{\wp}(\mathcal{M})$ et $\hat{\epsilon}(b, E) = 1$ si b est un élément de E et 0 sinon.

Le modèle ainsi construit est un modèle de schéma de compréhension. On montre que c'est un modèle de l'axiome de récurrence

$$\forall c\ (0 \epsilon c \Rightarrow \forall m\ (m \epsilon c \Rightarrow S(m) \epsilon c) \Rightarrow \forall n\ n \epsilon c)$$

Pour cela, on considère un élément arbitraire E de $\mathcal{M}_\kappa$ et on montre que

$$[\![(0 \epsilon c \Rightarrow \forall m\ (m \epsilon c \Rightarrow S(m) \epsilon c) \Rightarrow \forall n\ n \epsilon c)]\!]_{c=E} = 1$$

L'ensemble E est une partie définissable de $\mathcal{M}$. Soient A et $a_1, \ldots, a_n$ une proposition et des éléments de $\mathcal{M}$ définissant E. Le modèle $\mathcal{M}$ est un modèle de l'instance du schéma de récurrence correspondant à la proposition A et donc

$$[\![(0/y)A \Rightarrow \forall m\ ((m/y)A \Rightarrow (S(m)/y)A) \Rightarrow \forall n\ (n/y)A]\!]_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n} = 1$$

Comme les dénotations des propositions $t \epsilon c$ et $(t/y)A$ sont identiques dans une valuation dans laquelle $\phi c = E$, $\phi x_1 = a_1 \ldots, \phi x_n = a_n$, on en déduit que

$$[\![(0 \epsilon c \Rightarrow \forall m\ (m \epsilon c \Rightarrow S(m) \epsilon c) \Rightarrow \forall n\ n \epsilon c)]\!]_{c=E} = 1$$

Exercice 2.5

Donner une formulation de la théorie ZF avec un schéma d'axiome. Montrer que la théorie formulée avec des classes binaires est une extension conservatrice de cette théorie.

Quand on formule l'axiome des parties comme à la définition 1.36

$$\forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (\forall v\ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$$

on peut montrer que si A est un ensemble, il existe un ensemble qui contient les parties de A, mais on ne dispose pas d'une notation, comme $\wp(A)$, pour désigner cet ensemble.

Une alternative est d'introduire un symbole de fonction $\wp$ et l'axiome

$$\forall x \forall w\ (w \in \wp(x) \Leftrightarrow (\forall v\ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$$

On peut montrer que la théorie ainsi obtenue est une extension conservatrice de la théorie des ensembles.

Théorème 2.3 (Skolem)

Soit une théorie $\mathcal{T}$ et A une proposition de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\ B$, démontrable dans $\mathcal{T}$, alors la théorie obtenue en ajoutant un symbole de fonction f et l'axiome $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ (f(x_1, \ldots, x_n)/y)B$ est une extension conservatrice de $\mathcal{T}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$. On montre que ce modèle s'étend en un modèle de cet axiome. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des éléments quelconques de $\mathcal{M}$, il existe un élément b de $\mathcal{M}$ tel que

$$[\![B]\!]_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n,y=b} = 1$$

pour chaque n-uplet $a_1, \ldots, a_n$, on choisit un tel élément b et on définit $\hat{f}$ comme la fonction qui, à chaque n-uplet $a_1, \ldots, a_n$, associe l'élément b correspondant.

2.4 D'autres usages de la notion de modèle

Dans ce chapitre, nous avons montré que la notion de modèle permettait de démontrer de nombreuses propriétés des démonstrations, par exemple des propriétés d'indépendance, de cohérence, de cohérence relative et de conservativité. Cependant, en mathématiques et en informatique, cette notion a bien d'autres usages que celui d'être un outil pour étudier les démonstrations. Nous donnons, pour finir, quelques exemples, dans lesquels les notions de modèle et de langage sont utilisées, sans que le but soit d'étudier les démonstrations.

2.4.1 Les structures algébriques

Faire des démonstrations dans la théorie formée des axiomes de l'égalité et des axiomes

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x + y) + z = x + (y + z))$$

$$\forall x\ (x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$$

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0 \wedge y + x = 0)$$

n'a pas grand intérêt. En revanche, les modèles égalitaires de cette théorie sont intéressant en eux-mêmes : ce sont les groupes. Démontrer des propriétés des modèles de cette théorie donnera donc des résultats de théorie des groupes. Donnons un exemple.

Théorème 2.4 (Löwenheim-Skolem)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage fini ou dénombrable, $\mathcal{T}$ une théorie dans ce langage et κ un ensemble infini quelconque. Si la théorie $\mathcal{T}$ a un modèle infini, elle a un modèle de même cardinal que κ.

Démonstration. Ce théorème est une simple conséquence du théorème de complétude en cardinalité quelconque.

Soit le langage $(\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \kappa, \mathcal{P} \uplus \{=\})$ obtenu en ajoutant au langage de départ un symbole $=$ et une constante pour chaque élément de κ et la théorie $\mathcal{T}'$ obtenue en ajoutant à $\mathcal{T}$ les axiomes de l'égalité et les axiomes $\neg a = b$ pour tout couple (a, b) d'éléments distincts de κ. Soit $\mathcal{M}$ un modèle infini de la théorie $\mathcal{T}$.

Il n'est pas difficile de montrer que tout sous-ensemble fini de $\mathcal{T}'$ est cohérent : un sous-ensemble fini de $\mathcal{T}'$ n'utilise qu'un nombre fini de constantes de κ, il suffit d'étendre le modèle $\mathcal{M}$ en associant à ces constantes des éléments distincts de $\mathcal{M}$, ce qui est possible car $\mathcal{M}$ est infini, et en associant à toutes les autres constantes de κ un élément quelconque.

On en déduit que la théorie $\mathcal{T}'$ elle-même est cohérente. En effet, si elle ne l'était pas, il existerait un sous-ensemble fini Γ de $\mathcal{T}'$, tel que le séquent $\Gamma \vdash \bot$ soit démontrable, ce qui est contradictoire puisque tous les sous-ensembles finis de $\mathcal{T}'$ sont cohérents.

Soit $\mathcal{M}'$ le modèle égalitaire de $\mathcal{T}'$ construit dans la démonstration du théorème de complétude. Ce modèle a au moins autant d'éléments que κ puisque les éléments de κ sont associés à des éléments différents. Il est facile de démontrer que, l'ensemble κ étant infini, il y a autant de termes clos du langage $(\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \kappa, \mathcal{P} \uplus \{=\})$ que d'éléments dans κ et donc que le modèle construit a au plus autant d'éléments que κ. Il a donc exactement le même cardinal que κ.

On en déduit le corollaire suivant.

Proposition 2.10

Il existe des groupes de toute cardinalité infinie. Tout ensemble infini peut être muni d'une structure de groupe.

Ce théorème, qui ne mentionne pas la notion de modèle ou de théorie, est donc un résultat de théorie des groupes, obtenu comme corollaire d'un résultat de logique.

Le théorème de Löwenheim-Skolem a aussi comme conséquence l'existence de modèles égalitaires non dénombrables de l'arithmétique, et plus généralement de toute théorie qui a $\mathbb{N}$ comme modèle. Ce résultat peut surprendre, car tous les modèles égalitaires de l'arithmétique semblent, à première vue, avoir le même cardinal que $\mathbb{N}$. En effet, considérons un modèle égalitaire $\mathcal{M}$ de l'arithmétique et l'application F de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{M}$ qui à n associe $\hat{S}^n(\hat{0})$. L'image I de cette fonction contient $\hat{0}$, elle est close par $\hat{S}$ et $\mathcal{M}$ est un modèle de l'axiome de récurrence. Il semble donc que tous les éléments de $\mathcal{M}$ appartiennent à I et que $\mathcal{M}$ est donc au plus dénombrable. Où l'erreur se trouve-t-elle ?

L'erreur vient de ce que nous avons abusivement considéré que dans un modèle $\mathcal{M}$ de l'axiome de récurrence, tout ensemble I qui contient $\hat{0}$ et qui est clos par $\hat{S}$ contient l'ensemble $\mathcal{M}$ en entier, alors que cela n'est vrai que quand I appartient à l'ensemble $\mathcal{M}_\kappa$. Or, le schéma d'axiome de compréhension nous impose que $\mathcal{M}_\kappa$ contienne les sous-ensembles de $\mathcal{M}$ qui sont définissables par une proposition A et cela n'est pas le cas de l'ensemble I. Autrement dit, parmi la multitude non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$, le schéma de compréhension pose l'existence du petit nombre — dénombrable — d'ensembles définissables et l'axiome de récurrence affirme que si l'un de ces ensembles là contient 0 et est clos par successeur, alors il contient tous les entiers. Ce qui laisse un important degré de liberté.

Définition 2.12 (Modèle standard)

Un modèle *standard* de la théorie des classe est un modèle dans lequel $\mathcal{M}_\kappa = \wp(\mathcal{M}_\iota)$.

Exercice 2.6

Montrer que tous les modèles standards de l'arithmétique ont même cardinal que $\mathbb{N}$.

De même, alors que l'on sait que tous les corps totalement ordonnés, archimédiens et complets sont isomorphes à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tous les modèles standards de la théorie des corps totalement ordonnés, archimédiens et complets sont isomorphes à $\mathbb{R}$, il existe des modèles non standards de cette théorie qui sont dénombrables.

Ce concept de modèle standard est essentiel pour les applications de la théorie des modèles en algèbre. En revanche, il a un intérêt limité quand on utilise la notion de modèle pour étudier les démonstrations car, d'après le théorème de Löwenheim-Skolem, il n'y a pas de théorie exprimée dans un langage fini ou dénombrable dont tous les modèles soient standards.

2.4.2 La définissabilité

Une deuxième application de la notion de modèle est la définition de la notion d'ensemble, et plus généralement de relation, *définissable*.

Définition 2.13

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble et $R_1, \ldots, R_n$ des relations sur cet ensemble. On dit qu'une relation S sur $\mathcal{M}$ est ***définissable*** dans la structure $(\mathcal{M}, R_1, \ldots, R_n)$ s'il existe une proposition A, dans le langage formé des symboles $P_1, \ldots, P_n$ et contenant des variables libres $x_1, \ldots, x_p$, telle que les éléments $a_1, \ldots, a_p$ soient reliés par S si et seulement si

$$[\![A]\!]_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n} = 1$$

dans le modèle $(\mathcal{M}, R_1, \ldots, R_n)$.

Si R_1 et R_2 sont deux relations binaires, l'intersection de ces deux relations est définissable à partir de R_1 et R_2, par la proposition $P_1(x, y) \wedge P_2(x, y)$. Plus généralement, si deux relations de même arité sont définissables, leur intersection l'est également. L'ensemble des relations définissables est donc clos par intersection. Cet ensemble est également clos par réunion et complémentation. Cependant l'ensemble des relations définissables contient bien plus d'éléments que l'ensemble inductivement défini comme le plus petit ensemble contenant $R_1, \ldots, R_n$ et clos par intersection, réunion et complémentation. En effet, la possibilité d'utiliser plusieurs fois la même variable et de permuter les variables permet, par exemple, de définir l'ensemble des objets en relation avec eux-mêmes, $P(x, x)$, ou la relation réciproque d'une relation, $P(y, x)$, mais c'est surtout l'utilisation des quantificateurs qui donne toute sa richesse à cet ensemble, puisqu'il devient possible de définir, par exemple, la composée de deux relations, $\exists z\ (P_1(x, z) \wedge P_2(z, y))$.

Cependant, toutes les relations ne sont pas définissables. On peut, par exemple, démontrer que la clôture réflexive-transitive d'une relation n'est pas définissable à partir de cette relation.

En théorie des bases de données, les relations définissables correspondent aux requêtes exprimables.