Aspects Logiques de l'Intelligence Artificielle
– Partie sur les logiques dédiées à la représentation des connaissances –
Examen – Lundi 13 janvier 2020, 14h00–16h00, Salle C315

Les seuls documents autorisés sont les impressions des transparents du cours disponibles sur la page du cours. Aucun appareil autorisé. Comme d'habitude, on prendre le plus grand soin à la rédaction. Ce sujet comporte trois pages et cinq exercices.

Rappels. Vous trouverez ci-dessous quelques notations et définitions utiles pour la suite.

- Dans ATL, $\langle\!\langle A\rangle\!\rangle \mathsf{F}\psi \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle A\rangle\!\rangle(\top \mathsf{U} \psi)$; dans $\mathcal{ALC}$, $C \Rightarrow D \stackrel{\text{def}}{=} (\neg C) \sqcup D$.
- Un concept C de $\mathcal{ALC}$ est valide ssi pour toutes les interprétations $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, nous avons $C^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$.
- Par défaut, dans les exercices ci-dessous, la taille d'un concept ou d'une formule est comprise comme le nombre de noeuds de l'arbre syntaxique pour représenter cet objet (pas de partage de sous-structures).

Exercice 1.

1. En utilisant le calcul des tableaux pour $\mathcal{ALC}$ et ses propriétés, montrer que le concept ci-dessous n'est pas satisfaisable.
$$(\forall r.((\neg A) \sqcup B)) \sqcap (\forall r.A) \sqcap \exists r.\neg B$$
2. Montrer que si le concept C pour $\mathcal{ALC}$ est valide alors $\forall r.C$ est valide pour tous les rôles (atomiques) r.

Exercice 2. Soient $\mathfrak{M} = (Agt, S, Act, \mathtt{act}, \delta, L)$ une structure concurrente d'ATL, $A, A' \subseteq Agt$ deux coalitions telles que $A \cap A' = \emptyset$, $s \in S$ et φ, φ' deux formules de ATL construites avec des coalitions issues de Agt.

1. Montrer que si $\mathfrak{M}, s \models (\langle\!\langle A\rangle\!\rangle \mathsf{G}\varphi) \wedge (\langle\!\langle A'\rangle\!\rangle \mathsf{G}\varphi')$ alors $\mathfrak{M}, s \models \langle\!\langle A \cup A'\rangle\!\rangle \mathsf{G}(\varphi \wedge \varphi')$.
2. A-t-on toujours si $\mathfrak{M}, s \models (\langle\!\langle A\rangle\!\rangle \mathsf{F}\varphi) \wedge (\langle\!\langle A'\rangle\!\rangle \mathsf{F}\varphi')$ alors $\mathfrak{M}, s \models \langle\!\langle A \cup A'\rangle\!\rangle \mathsf{F}(\varphi \wedge \varphi')$?

Exercice 3.

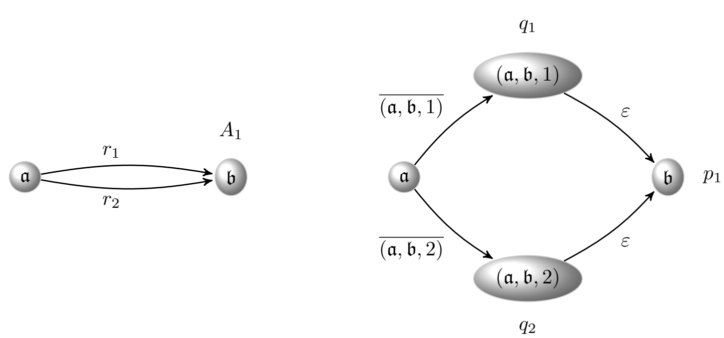
1. Définir une famille de concepts $(C_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{ALC}$ telle que la taille de C_n soit polynomiale en n (pour un polynôme fixé), chaque concept C_n est satisfaisable (c'est-à-dire, $C_n^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ pour une interprétation $\mathcal{I}$) mais seulement dans des interprétations ayant au moins 2^n éléments dans le domaine.
2. On justifiera qu'en effet, les seules interprétations satisfaisant C_n ont au moins 2^n éléments. On ne demande pas une preuve formelle mais vous donnerez les éléments que vous jugez principaux dans l'argumentation.

Exercice 4. On s'intéresse au **problème d'appartenance** pour $\mathcal{ALC}$ (ou pour des variantes) qui consiste à déterminer si $\mathfrak{a} \in C^{\mathcal{I}}$, pour un concept C de $\mathcal{ALC}$, une interprétation $\mathcal{I}$ définie sur le vocabulaire de C avec domaine fini $\Delta^{\mathcal{I}}$, et $\mathfrak{a} \in \Delta^{\mathcal{I}}$. On cherche à le résoudre en utilisant une procédure de décision pour le problème de model-checking pour ATL (noté MC(ATL)), dont on a vu qu'il peut être résolu en temps polynomial. Dans cet exercice, nous considérons $\mathcal{ALC}$ (ou ses extensions) restreinte aux rôles atomiques $r_1, \ldots, r_\alpha$ et aux concepts atomiques $A_1, \ldots, A_\beta$ avec $\alpha, \beta \geq 1$ fixés dans la suite. En particulier, les interprétations $\mathcal{I}$ sont restreintes à ce vocabulaire. Par simplicité pour les preuves à venir, on exclut $\top$ et $\bot$, et les constructeurs de concept sont limités à $\neg$, $\sqcap$ et $\exists r.$, sauf avis contraire. De même pour ATL, nous nous restreignons aux variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_\beta$, $q_1, \ldots, q_\alpha$ et $h_1, \ldots, h_\beta$.

A toute interprétation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ avec $\Delta^{\mathcal{I}}$ fini, on associe la structure concurrente finie (CGS) d'ATL $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}} = (Agt, S, Act, \mathtt{act}, \delta, L)$ définie ainsi:

- $Agt \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}$, $S \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{\mathcal{I}} \cup \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i) \mid i \in [1, \alpha], \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$,
- $Act \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i)} \mid i \in [1, \alpha], \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\} \uplus \{\varepsilon\}$.
- Pour $s \in S$ tel que $s = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i)$, nous avons $\mathtt{act}(1, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$.
- Pour $s \in S$ tel que $s = \mathfrak{a} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, nous avons $\mathtt{act}(1, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i)} \mid i \in [1, \alpha], \mathfrak{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, \text{ tel que } (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$.
- Comme il n'y a qu'un seul agent, nous pouvons supposer que δ est défini pour un sous-ensemble de $S \times Act$ ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $i \in [1, \alpha]$).
  - $\delta(\mathfrak{a}, \overline{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i)}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i)$; $\delta((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{b}$,
  - pour les autres paires dans $S \times Act$, δ n'est pas défini.
- Pour $\mathfrak{a} \in S$, $L(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{p_i \mid i \in [1, \beta],\ \mathfrak{a} \in A_i^{\mathcal{I}}\}$; pour $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i) \in S$, $L((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, i)) \stackrel{\text{def}}{=} \{q_i\}$.

On trouvera ci-dessous la représentation graphique d'une interprétation $\mathcal{I}$ (à gauche), de la structure concurrente $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ (à droite) pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.



1. A supposer que la taille de $\mathcal{I}$ soit définie comme $\mathsf{card}(\Delta^{\mathcal{I}}) \times \beta + \sum_{i=1}^{\alpha} \mathsf{card}(r_i^{\mathcal{I}})$ (notée $|\mathcal{I}|$) et la taille de $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ soit définie comme $\mathsf{card}(S) \times \beta + \mathsf{card}(S)^2 \times \mathsf{card}(Act)$ (notée $|\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}|$), montrer que $|\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}|$ est polynomiale en la taille de $|\mathcal{I}|$.

2. Nous définissons une fonction de traduction $\mathfrak{t}$ des concepts de $\mathcal{ALC}$ vers les formules d'ATL:

   - $\mathfrak{t}(A_i) \stackrel{\text{def}}{=} p_i$; $\mathfrak{t}(\neg D) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathfrak{t}(D)$; $\mathfrak{t}(D_1 \sqcap D_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{t}(D_1) \wedge \mathfrak{t}(D_2)$.
   - $\mathfrak{t}(\exists r_i.D) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle\{1\}\rangle\!\rangle \mathsf{X}\ (q_i \wedge \langle\!\langle\{1\}\rangle\!\rangle \mathsf{X}\ \mathfrak{t}(D))$.

   Montrer que pour tout $\mathfrak{a} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ et pour tout concept C de $\mathcal{ALC}$, nous avons $\mathfrak{a} \in C^{\mathcal{I}}$ (dans $\mathcal{ALC}$) si et seulement si $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{a} \models \mathfrak{t}(C)$ (dans ATL).

3. En utilisant les résultats de MC(ATL), en déduire que le problème d'appartenance pour $\mathcal{ALC}$ est dans PTIME.

4. Nous considérons l'extension d'$\mathcal{ALC}$, disons $\mathcal{ALC}^+$, pour laquelle on autorise des rôles complexes r_i^+ ($i \in [1, \alpha]$) avec la sémantique suivante.

   - $(r_i^+)^{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_M) \mid M \geq 1,\ (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1) \in r_i^{\mathcal{I}}, \ldots, (\mathfrak{a}_{M-1}, \mathfrak{a}_M) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$,
     ($(r_i^+)^{\mathcal{I}}$ est la fermeture transitive de $(r_i)^{\mathcal{I}}$.)
   - $(\exists r_i^+.D)^{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{a} \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid (r_i^+)^{\mathcal{I}}(\mathfrak{a}) \cap D^{\mathcal{I}} \neq \emptyset\}$.

   Etendre la fonction de traduction $\mathfrak{t}$ aux concepts de $\mathcal{ALC}^+$ et montrer la correction de l'extension. Qu'en concluez-vous ?

5. Nous considérons maintenant une autre extension d'$\mathcal{ALC}$, disons $\mathcal{ALCI}$, pour laquelle on autorise les rôles inverses r_i^-. Etendre $\mathfrak{t}$, et éventuellement adapter la construction $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$, aux concepts de $\mathcal{ALCI}$ et montrer la correction de l'extension.

Exercice 5. Soit $\mathcal{T}^\star = \{A_1 \equiv C_1, \ldots, A_m \equiv C_m\}$ une TBox de $\mathcal{ALC}$ vérifiant les propriétés suivantes.

- Chaque A_i est un concept atomique, et $A_i \equiv C_i$ est une abbréviation pour $A_i \sqsubseteq C_i$ et $C_i \sqsubseteq A_i$.
- Pour $i, j \in [1, m]$, si A_j apparaît dans C_i alors $j > i$.
- Si $i \neq j \in [1, m]$, alors A_i et A_j sont (syntaxiquement) distincts.

Une telle TBox $\mathcal{T}^\star$ est dite **acyclique**.

1. Définir brièvement un graphe acyclique à partir de $\mathcal{T}^\star$, qui vous semble justifier l'appellation pour $\mathcal{T}^\star$.

2. Etant donné une interprétation $\mathcal{I}$, montrer qu'il existe une interprétation $\mathcal{J}$ telle que $\mathcal{J} \models \mathcal{T}^\star$, les interprétations des rôles (atomiques) et des concepts atomiques différents de $\{A_1, \ldots, A_m\}$ sont identiques dans $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$.

3. Proposer un algorithme tel qu'étant donné une base de connaissance $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ avec $\mathcal{T}$ acyclique, retourne une ABox $\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{K}$ est consistante si et seulement si $(\emptyset, \mathcal{A}')$ est consistante. Il n'est pas demandé d'en montrer la correction.

4. Justifier la terminaison de votre algorithme et analyser sa complexité algorithmique.