

**Aspects Logiques de l'Intelligence Artificielle**  
**– Partie sur les logiques dédiées à la représentation des connaissances –**  
**Correction de l'examen – Lundi 13 janvier 2020, 14h00–16h00, Salle C315**

*Les seuls documents autorisés sont les impressions des transparents du cours disponibles sur la page du cours. Aucun appareil autorisé. Comme d'habitude, on prendre le plus grand soin à la rédaction.*

**Rappels.** Vous trouverez ci-dessous quelques notations et définitions utiles pour la suite.

- $\langle\langle A \rangle\rangle F\psi \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle A \rangle\rangle (\top \cup \psi)$ ;  $C \Rightarrow D \stackrel{\text{def}}{=} (\neg C) \sqcup D$ .
- Un concept  $C$  de  $\mathcal{ALC}$  est valide ssi pour toutes les interprétations  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ , nous avons  $C^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$ .
- Par défaut, dans les exercices ci-dessous, la taille d'un concept ou d'une formule est comprise comme le nombre de noeuds de l'arbre syntaxique pour représenter cet objet (pas de partage de sous-structures).

*Tout d'abord, le sujet était trop long pour être traité en entier avec tous les détails nécessaires, et la notation en a bien-sûr tenu compte. La correction ci-dessous est plus développée que ce qui était attendue.*

**Exercice 1.**

1. En utilisant le calcul des tableaux pour  $\mathcal{ALC}$  et ses propriétés, montrer que le concept ci-dessous n'est pas satisfaisable.

$$(\forall r. ((\neg A) \sqcup B)) \sqcap (\forall r. A) \sqcap \exists r. \neg B$$

2. Montrer que si le concept  $C$  pour  $\mathcal{ALC}$  est valide alors  $\forall r. C$  est valide pour tous les roles (atomiques)  $r$ .

**Solution de l'exercice 1.**

1. Nous notons  $C = (\forall r. (\neg A \sqcup B)) \sqcap (\forall r. A) \sqcap \exists r. \neg B$ . Soit  $\mathcal{A}_0$  l'ABox  $\{a : (\forall r. (\neg A \sqcup B)) \sqcap (\forall r. A) \sqcap \exists r. \neg B\}$ . Tous les concepts de  $\mathcal{A}_0$  sont en NNF, donc on peut appliquer les règles par tableaux vues en cours (sinon, on mettrait en NNF, ou on étendrait l'ensemble des règles). Nous allons montrer que pour toutes les ABox  $\mathcal{A}'$  dont on ne puisse plus appliquer de règles de tableaux pour  $\mathcal{ALC}$ , il y a nécessairement un clash. On pourra en conclure que  $C$  n'est pas satisfiable car d'après le cours,  $\mathcal{A}$  est consistant (équivalent à la satisfaisabilité de  $C$ ) ss'il existe  $\mathcal{A}'$  telle que  $\mathcal{A} \xrightarrow{*} \mathcal{A}'$ , et  $\mathcal{A}'$  est complète et sans clash. Nous noterons par ailleurs, qu'en appliquant les règles, les seules ABox dérivables de  $\mathcal{A}_0$  sont les suivantes (modulo le renommage de  $a_{new}$ ).

- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \{a_{new} : \neg B, (a, a_{new}) : r\}$  (on applique la règle  $\exists$  sur  $\mathcal{A}_0$ , seule possibilité à partir de  $\mathcal{A}_0$ ).
- $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{a_{new} : A\}$  (on applique la règle  $\forall$  sur  $\mathcal{A}_1$ ).
- $\mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{a_{new} : \neg A \sqcup B\}$  (on applique la règle  $\forall$  sur  $\mathcal{A}_1$ ).
- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}'_2 \cup \mathcal{A}_2$  (par exemple, on applique la règle  $\forall$  sur  $\mathcal{A}_2$ ).
- $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_3 \cup \{a_{new} : \neg A\}$  (on applique la règle  $\sqcup$  sur  $\mathcal{A}_3$ ).

- $\mathcal{A}'_4 = \mathcal{A}_3 \cup \{a_{new} : B\}$  (on applique la règle  $\sqcup$  sur  $\mathcal{A}_3$ ).

On ne peut plus appliquer de règles sur  $\mathcal{A}_4$  ou sur  $\mathcal{A}'_4$  mais les deux contiennent un clash. On peut encore dériver les ABox suivantes en repartant de  $\mathcal{A}'_2$ .

- $\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}'_2 \cup \{a_{new} : \neg A\}$  (on applique la règle  $\sqcup$  sur  $\mathcal{A}'_2$ ).
- $\mathcal{A}'_5 = \mathcal{A}_3 \cup \{a_{new} : B\}$  (on applique la règle  $\sqcup$  sur  $\mathcal{A}_3$ ), et  $\mathcal{A}'_5$  contient un clash.
- $\mathcal{A}_6 = \mathcal{A}_5 \cup \{a_{new} : A\}$  (on applique la règle  $\forall$  sur  $\mathcal{A}_5$ ), et  $\mathcal{A}_6$  contient un clash.

Ainsi, il n'existe pas d'ABox  $\mathcal{A}'$  telle que  $\mathcal{A}'$  est complète et sans clash. (Une représentation graphique des dérivations est sans doute mieux adaptée.)

2. Supposons que  $C$  soit valide et soit une interprétation  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ . Par hypothèse,  $C^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$ . Par définition de  $(\forall r.C)^{\mathcal{I}}$ , nous avons

$$(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{\mathbf{a} \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(\mathbf{a}) \subseteq C^{\mathcal{I}}\},$$

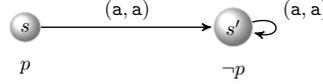
et par conséquent,  $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{\mathbf{a} \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(\mathbf{a}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}\}$  et donc  $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$  puisque  $r^{\mathcal{I}}(\mathbf{a}) \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  pour tous les éléments  $\mathbf{a} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ . Comme  $\mathcal{I}$  est arbitraire, on en conclut la validité de  $(\forall r.C)$ .

**Exercice 2.** Soient  $\mathfrak{M} = (Agt, S, Act, act, \delta, L)$  une structure concurrente d'ATL,  $A, A' \subseteq Agt$  deux coalitions telles que  $A \cap A' = \emptyset$ ,  $s \in S$  et  $\varphi, \varphi'$  deux formules de ATL construites avec des coalitions issues de  $Agt$ .

1. Montrer que si  $\mathfrak{M}, s \models (\langle\langle A \rangle\rangle G\varphi) \wedge (\langle\langle A' \rangle\rangle G\varphi')$  alors  $\mathfrak{M}, s \models \langle\langle A \cup A' \rangle\rangle G(\varphi \wedge \varphi')$ .
2. A-t-on toujours si  $\mathfrak{M}, s \models (\langle\langle A \rangle\rangle F\varphi) \wedge (\langle\langle A' \rangle\rangle F\varphi')$  alors  $\mathfrak{M}, s \models \langle\langle A \cup A' \rangle\rangle F(\varphi \wedge \varphi')$ ?

### Solution de l'exercice 2.

1. Supposons que  $\mathfrak{M}, s \models (\langle\langle A \rangle\rangle G\varphi) \wedge (\langle\langle A' \rangle\rangle G\varphi')$ . Il existe donc une stratégie  $F_A$  telle que pour tous les calculs  $\lambda = s_0 \xrightarrow{f_0} s_1 \dots$  dans  $\text{Comp}(s, F_A)$ , nous avons  $\mathfrak{M}, s_i \models \varphi$  pour  $i \geq 0$ . De même, il existe une stratégie  $F_{A'}$  telle que pour tous les calculs  $\lambda = s_0 \xrightarrow{f'_0} s_1 \dots$  dans  $\text{Comp}(s, F_{A'})$ , nous avons  $\mathfrak{M}, s_i \models \varphi'$  pour  $i \geq 0$ . Définissons la stratégie  $F_{A \cup A'}$  telle que pour calcul fini  $H = s_0 \xrightarrow{f_0} s_1 \dots \xrightarrow{f_{n-1}} s_n$ , si  $F_A(H) = \mathfrak{f} \in D_A(s_n)$  et  $F_{A'}(H) = \mathfrak{f}' \in D_{A'}(s_n)$ , alors  $F_{A \cup A'}(H) = \mathfrak{f} \uplus \mathfrak{f}'$ , où  $\mathfrak{f} \uplus \mathfrak{f}'$  est l'union disjointe de  $\mathfrak{f}$  et  $\mathfrak{f}'$  définie sur  $A \cup A'$ , possible car  $A \cap A' = \emptyset$ . De même, comme  $A \cap A' = \emptyset$ , chaque calcul de  $\text{Comp}(s, F_{A \cup A'})$  est dans  $\text{Comp}(s, F_A) \cap \text{Comp}(s, F_{A'})$ . Par conséquent, pour tous les calculs  $\lambda = s_0 \xrightarrow{f_0} s_1 \dots$  dans  $\text{Comp}(s, F_{A \cup A'})$ , nous avons  $\mathfrak{M}, s_i \models \varphi \wedge \varphi'$  pour  $i \geq 0$ . L'existence de  $F_{A \cup A'}$  permet justement de conclure que  $\mathfrak{M}, s \models \langle\langle A \cup A' \rangle\rangle G(\varphi \wedge \varphi')$  par définition de la relation de satisfaction.
2. Si on prend  $\varphi' = \neg\varphi$ ,  $\varphi \wedge \varphi'$  n'est pas satisfaisable, et donc on n'a jamais  $\mathfrak{M}, s \models \langle\langle A \cup A' \rangle\rangle F(\varphi \wedge \varphi')$  puisque cela impliquerait l'existence d'une stratégie telle que pour tous les calculs  $\lambda$  respectant la stratégie, il y a une position où  $\varphi \wedge \varphi'$  est vraie. Or il y a au moins un calcul respectant une stratégie, et donc une telle position ne peut exister car  $\varphi \wedge \varphi'$  n'est pas satisfaisable, d'où l'impossibilité de l'existence d'une telle stratégie. Il reste à trouver  $\mathfrak{M}$  et  $s \in S$  tels que  $\mathfrak{M}, s \models (\langle\langle A \rangle\rangle F\varphi) \wedge (\langle\langle A' \rangle\rangle F\varphi')$ , par exemple avec  $\varphi = p$  et  $\varphi' = \neg p$ . Voici un exemple de CGS avec deux agents.



Nous avons  $\mathfrak{M}, s \models (\langle\{1\}\rangle F p) \wedge (\langle\{2\}\rangle F \neg p)$  mais pas  $\mathfrak{M}, s \models \langle\{1, 2\}\rangle F (p \wedge \neg p)$ .

### Exercice 3.

1. Définir une famille de concepts  $(C_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathcal{ALC}$  telle que la taille de  $C_n$  soit polynomiale en  $n$  (pour un polynôme fixé), chaque concept  $C_n$  est satisfaisable (c'est-à-dire,  $C_n^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$  pour une interprétation  $\mathcal{I}$ ) mais seulement dans des interprétations ayant au moins  $2^n$  éléments dans le domaine.
2. On justifiera qu'en effet, les seules interprétations satisfaisant  $C_n$  ont au moins  $2^n$  éléments. On ne demande pas une preuve formelle mais vous donnerez les éléments que vous jugez principaux dans l'argumentation.

**Solution de l'exercice 3.** Nous utilisons la notation  $(\forall r)^i . D$  avec  $i \geq 0$  de la façon suivante:  $(\forall r)^0 . D \stackrel{\text{def}}{=} D$  et pour  $i \geq 0$ ,  $(\forall r)^{i+1} . D \stackrel{\text{def}}{=} (\forall r)^i . (\forall r . D)$ .

1. Définissons la famille  $(C_n)_{n \geq 1}$  inductivement.

- $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} A_0 \sqcap \exists r . ((\neg A_0) \sqcap A_1) \sqcap \exists r . ((\neg A_0) \sqcap \neg A_1)$ .
- Pour  $n \geq 2$ ,

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} (\exists r . A_n) \sqcap (\exists r . \neg A_n) \sqcap (\forall r . C_{n-1}) \sqcap \prod_{i=1}^{n-1} (\forall r)^i . \left( (A_n \Rightarrow \forall r . A_n) \sqcap ((\neg A_n) \Rightarrow \forall r . \neg A_n) \right)$$

On peut remarquer que la taille de  $C_n$  est quadratique en  $n$ .

2. Montrons que les seules interprétations satisfaisant  $C_n$  ont au moins  $2^n$  éléments. La preuve est par induction sur  $n$ . Nous montrons une propriété plus forte, à savoir que si  $a \in C_n^{\mathcal{I}}$  alors on peut extraire un arbre binaire de profondeur  $n$  à partir de  $a$  (avec la relation  $r^{\mathcal{I}}$ ) dont tous les éléments du sous-arbre à gauche sont dans  $A_n^{\mathcal{I}}$ , et tous les éléments du sous-arbre à droite ne sont pas dans  $A_n^{\mathcal{I}}$ .
  - Supposons que  $C_1^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . Donc, il existe  $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$  tel que  $a \in (\exists r . ((\neg A_0) \sqcap A_1))^{\mathcal{I}}$  et  $a \in (\exists r . (\neg A_0) \sqcap \neg A_1)^{\mathcal{I}}$ . Par conséquent, il existe  $b_1$  tel que  $(a, b_1) \in r^{\mathcal{I}}$  et  $b_1 \in A_1^{\mathcal{I}}$  et il existe  $b_2$  tel que  $(a, b_2) \in r^{\mathcal{I}}$  et  $b_2 \notin A_1^{\mathcal{I}}$ . Ainsi,  $b_1 \neq b_2$  et donc  $\text{card}(\Delta^{\mathcal{I}}) \geq 2$ . De même  $a \neq b_1$  et  $a \neq b_2$  grâce aux propriétés sur  $A_0$ . Il est facile de construire  $\mathcal{I}$  telle que  $C_1^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . L'arbre issu de  $a$  contient  $b_1$  et  $b_2$ .
  - Prenons comme hypothèse d'induction, que la propriété est vraie pour  $n - 1 \geq 1$ . Supposons que  $C_n^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . Donc, il existe  $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$  tel que  $a \in (\exists r . A_n)^{\mathcal{I}}$  et  $a \in (\exists r . \neg A_n)^{\mathcal{I}}$ . Par conséquent, il existe  $b_1$  tel que  $(a, b_1) \in r^{\mathcal{I}}$  et  $b_1 \in A_{n-1}^{\mathcal{I}}$  et il existe  $b_2$  tel que  $(a, b_2) \in r^{\mathcal{I}}$  et  $b_2 \notin A_{n-1}^{\mathcal{I}}$ . Ainsi,  $b_1 \neq b_2$ . De plus, comme  $a \in (\forall r . C_{n-1})^{\mathcal{I}}$ ,  $b_1 \in C_{n-1}^{\mathcal{I}}$  et  $b_2 \in C_{n-1}^{\mathcal{I}}$ .

Par hypothèse d'induction,  $\text{card}(C_{n-1}^{\mathcal{I}}) \geq 2^{n-1}$ . Nous allons montrer pourquoi, en fait  $\text{card}(C_{n-1}^{\mathcal{I}}) \geq 2^n$ . En effet, comme

$$\mathbf{a} \in \left( \prod_{i=1}^{n-1} (\forall r)^i \cdot \left( (A_n \Rightarrow \forall r. A_n) \sqcap ((\neg A_n) \Rightarrow \forall r. \neg A_n) \right) \right)^{\mathcal{I}},$$

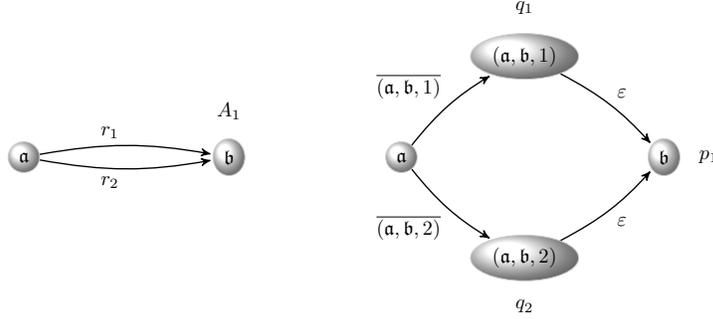
l'arbre issu de  $\mathbf{b}_1$  de taille  $2^{n-1}$  est disjoint l'arbre issu de  $\mathbf{b}_2$  de taille  $2^{n-1}$  et donc  $\text{card}(C_{n-1}^{\mathcal{I}}) \geq 2^n$ . De même,  $\mathbf{a}$  est nécessairement différent de  $\mathbf{b}_1$  et de  $\mathbf{b}_2$ .

**Exercice 4.** On s'intéresse au **problème d'appartenance** pour  $\mathcal{ALC}$  (ou pour des variantes) qui consiste à déterminer si  $\mathbf{a} \in C^{\mathcal{I}}$ , pour un concept  $C$  de  $\mathcal{ALC}$ , une interprétation  $\mathcal{I}$  définie sur le vocabulaire de  $C$  avec domaine fini  $\Delta^{\mathcal{I}}$ , et  $\mathbf{a} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ . On cherche à le résoudre en utilisant une procédure de décision pour le problème de model-checking pour ATL (noté  $\text{MC(ATL)}$ ), dont on a vu qu'il peut être résolu en temps polynomial. Dans cet exercice, nous considérons  $\mathcal{ALC}$  (ou ses extensions) restreinte aux rôles atomiques  $r_1, \dots, r_\alpha$  et aux concepts atomiques  $A_1, \dots, A_\beta$  avec  $\alpha, \beta \geq 1$  fixés dans la suite. En particulier, les interprétations  $\mathcal{I}$  sont restreintes à ce vocabulaire. Par simplicité pour les preuves à venir, on exclut  $\top$  et  $\perp$ , et les constructeurs de concept sont limités à  $\neg, \sqcap$  et  $\exists r.$ , sauf avis contraire. De même pour ATL, nous nous restreignons aux variables propositionnelles  $p_1, \dots, p_\beta, q_1, \dots, q_\alpha$  et  $h_1, \dots, h_\beta$ .

A toute interprétation  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  avec  $\Delta^{\mathcal{I}}$  fini, on associe la structure concurrente finie (CGS) d'ATL  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}} = (\text{Agt}, S, \text{Act}, \text{act}, \delta, L)$  définie ainsi:

- $\text{Agt} \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}$ ,  $S \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{\mathcal{I}} \cup \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i) \mid i \in [1, \alpha], \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$ ,
- $\text{Act} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)} \mid i \in [1, \alpha], \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\} \uplus \{\varepsilon\}$ .
- Pour  $s \in S$  tel que  $s = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)$ , nous avons  $\text{act}(1, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$ .
- Pour  $s \in S$  tel que  $s = \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)}$ , nous avons  $\text{act}(1, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)} \mid i \in [1, \alpha], \mathbf{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, \text{ tel que } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$ .
- Comme il n'y a qu'un seul agent, nous pouvons supposer que  $\delta$  est défini pour un sous-ensemble de  $S \times \text{Act}$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, i \in [1, \alpha]$ ).
  - $\delta(\mathbf{a}, \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)$ ;  $\delta((\mathbf{a}, \mathbf{b}, i), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}$ ,
  - pour les autres paires dans  $S \times \text{Act}$ ,  $\delta$  n'est pas défini.
- Pour  $\mathbf{a} \in S$ ,  $L(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{p_i \mid i \in [1, \beta], \mathbf{a} \in A_i^{\mathcal{I}}\}$ ; pour  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i) \in S$ ,  $L((\mathbf{a}, \mathbf{b}, i)) \stackrel{\text{def}}{=} \{q_i\}$ .

On trouvera ci-dessous la représentation graphique d'une interprétation  $\mathcal{I}$  (à gauche), de la structure concurrente  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  (à droite) pour  $\alpha = 2$  et  $\beta = 1$ .



1. A supposer que la taille de  $\mathcal{I}$  soit définie comme  $\text{card}(\Delta^{\mathcal{I}}) \times \beta + \sum_{i=1}^{\alpha} \text{card}(r_i^{\mathcal{I}})$  (notée  $|\mathcal{I}|$ ) et la taille de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  soit définie comme  $\text{card}(S) \times \beta + \text{card}(S)^2 \times \text{card}(\text{Act})$  (notée  $|\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}|$ ), montrer que  $|\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}|$  est polynomiale en la taille de  $|\mathcal{I}|$ .
2. Nous définissons une fonction de traduction  $\mathfrak{t}$  des concepts de  $\mathcal{ALC}$  vers les formules d'ATL:
  - $\mathfrak{t}(A_i) \stackrel{\text{def}}{=} p_i$ ;  $\mathfrak{t}(\neg D) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \mathfrak{t}(D)$ ;  $\mathfrak{t}(D_1 \sqcap D_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{t}(D_1) \wedge \mathfrak{t}(D_2)$ .
  - $\mathfrak{t}(\exists r_i . D) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X (q_i \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X \mathfrak{t}(D))$ .

Montrer que pour tout  $\mathfrak{a} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  et pour tout concept  $C$  de  $\mathcal{ALC}$ , nous avons  $\mathfrak{a} \in C^{\mathcal{I}}$  (dans  $\mathcal{ALC}$ ) si et seulement si  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{a} \models \mathfrak{t}(C)$  (dans ATL).

3. En utilisant les résultats de MC(ATL), en déduire que le problème d'appartenance pour  $\mathcal{ALC}$  est dans PTIME.
4. Nous considérons l'extension d' $\mathcal{ALC}$ , disons  $\mathcal{ALC}^+$ , pour laquelle on autorise des rôles complexes  $r_i^+$  ( $i \in [1, \alpha]$ ) avec la sémantique suivante.
  - $(r_i^+)^{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_M) \mid M \geq 1, (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1) \in r_i^{\mathcal{I}}, \dots, (\mathfrak{a}_{M-1}, \mathfrak{a}_M) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$ ,  
 $((r_i^+)^{\mathcal{I}})^{\mathcal{I}}$  est la fermeture transitive de  $(r_i^+)^{\mathcal{I}}$ .
  - $(\exists r_i^+ . D)^{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{a} \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid (r_i^+)^{\mathcal{I}}(\mathfrak{a}) \cap D^{\mathcal{I}} \neq \emptyset\}$ .

Etendre la fonction de traduction  $\mathfrak{t}$  aux concepts de  $\mathcal{ALC}^+$  et montrer la correction de l'extension. Qu'en concluez-vous ?

5. Nous considérons maintenant une autre extension d' $\mathcal{ALC}$ , disons  $\mathcal{ALCI}$ , pour laquelle on autorise les rôles inverses  $r_i^-$ . Etendre  $\mathfrak{t}$ , et éventuellement adapter la construction  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ , aux concepts de  $\mathcal{ALCI}$  et montrer la correction de l'extension.

#### Solution de l'exercice 4.

1. Par construction, nous avons

$$\text{card}(S) \leq \text{card}(\Delta^{\mathcal{I}}) + \left( \sum_{i=1}^{\alpha} \text{card}(r_i^{\mathcal{I}}) \right) \times \alpha \leq (1 + \alpha) \times |\mathcal{I}|$$

et

$$\text{card}(Act) \leq \left( \sum_{i=1}^{\alpha} \text{card}(r_i^{\mathcal{I}}) \right) + 1 \leq |\mathcal{I}| + 1.$$

Ainsi,

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}| \leq ((1 + \alpha) \times |\mathcal{I}|) \times \beta + ((1 + \alpha) \times |\mathcal{I}|)^2 \times |\mathcal{I}| + 1,$$

ce qui est bien polynomial (d'ailleurs même si on n'avait pas fixé  $\alpha$  et  $\beta$ ).

2. La preuve est par induction structurelle, seul le cas  $\exists r_i.D$  demande de faire attention.

**Cas**  $C = A_i$ . Les énoncés suivants sont équivalents.

- $a \in A_i^{\mathcal{I}}$ ,
- $p_i \in L(a)$  (par définition de  $L$ ),
- $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models p_i$  (par définition de  $\models$  pour ATL).

**Cas**  $C = D_1 \sqcap D_2$ . Les énoncés suivants sont équivalents.

- $a \in (D_1 \sqcap D_2)^{\mathcal{I}}$ ,
- $a \in D_1^{\mathcal{I}} \cap D_2^{\mathcal{I}}$  (par définition de  $(D_1 \sqcap D_2)^{\mathcal{I}}$ ),
- $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models t(D_1)$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models t(D_2)$  (par hypothèse d'induction),
- $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models t(D_1 \sqcap D_2)$  (par définition de  $t$  et de  $\models$  pour ATL).

**Cas:**  $C = \exists r_i.D$ . D'abord, supposons que  $a \in (\exists r_i.D)^{\mathcal{I}}$ . Par définition de  $(\exists r_i.D)^{\mathcal{I}}$ , il existe  $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$  tel que  $(a, b) \in r_i^{\mathcal{I}}$  et  $b \in D^{\mathcal{I}}$ . Par hypothèse d'induction, nous avons  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, b \models t(D)$ . Comme  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  ne possède qu'un seul agent,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, s \models \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X \varphi$  est vérifiée s'il existe une action  $a$  telle que  $a \in \text{act}(1, s)$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, \delta(s, a) \models \varphi$ . Or  $(a, b) \in r_i^{\mathcal{I}}$ , donc par définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  nous avons les transitions

$$a \xrightarrow{\overline{(a, b, i)}} (a, b, i) \xrightarrow{\varepsilon} b$$

dans  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ . On peut vérifier que  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X (q_i \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X t(D))$  car en plus par définition de  $L$ ,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, (a, b, i) \models q_i$ . La preuve dans l'autre sens est analogue en remarquant cependant que si  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X (q_i \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X t(D))$ , alors il existe nécessairement  $a \in S$  tel que

$$a \xrightarrow{\overline{(a, b, i)}} (a, b, i) \xrightarrow{\varepsilon} b,$$

d'où ensuite la propriété  $(a, b) \in r_i^{\mathcal{I}}$  par définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ .

3. Pour résoudre  $a \in C^{\mathcal{I}}$ , on construit  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  et on teste si  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models t(C)$ . Cette approche est correcte d'après la question 2.  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  est de taille polynomiale en la taille de  $\mathcal{I}$  (d'après la question 1.) et on peut construire  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  en temps polynomial. On remarque aussi que  $t(C)$  se construit facilement en temps polynomial et d'ailleurs, la taille de  $t(C)$  est linéaire en la taille de  $C$  (ici, on utilise une représentation arborescente des concepts et formules). On sait que MC(ATL) est dans PTIME, donc sur une instance de taille polynomiale en la taille de  $\mathcal{I}$ , cela donne un algorithme en temps polynomial pour déterminer si  $a \in C^{\mathcal{I}}$ .

4. On étend  $t$  de la façon suivante:

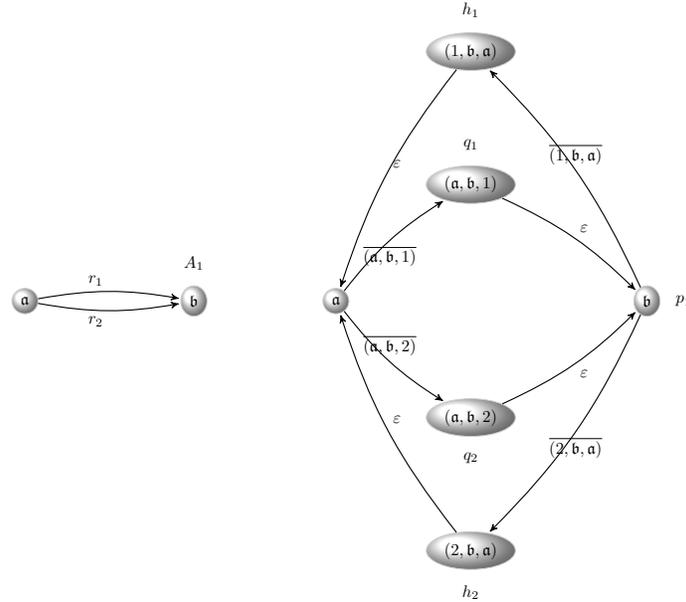
$$t(\exists r_i^+.D) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle \{1\} \rangle\rangle \left( \bigwedge_{j \neq i} \neg q_j \right) \mathbf{U} \left( \left( \bigwedge_{j=1}^{\alpha} \neg q_j \right) \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X (q_i \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle X t(D)) \right).$$

La correction se prouve de façon analogue et on obtient la borne PTIME pour le problème d'appartenance pour  $\mathcal{ALC}^+$  avec exactement les mêmes arguments de complexité que pour  $\mathcal{ALC}$ . Traitons le nouveau cas dans l'induction, c'est-à-dire  $C = \exists r_i^+.D$ . D'abord, supposons que  $\mathbf{a} \in (\exists r_i^+.D)^{\mathcal{I}}$ . Par définition de  $(\exists r_i^+.D)^{\mathcal{I}}$ , il existe  $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) \in r_i^{\mathcal{I}}, \dots, (\mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{a}_M) \in r_i^{\mathcal{I}}$  avec  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ , et disons  $\mathbf{b} = \mathbf{a}_M$  tels que  $\mathbf{b} \in D^{\mathcal{I}}$ . Par hypothèse d'induction, nous avons  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, \mathbf{b} \models \mathfrak{t}(D)$ . Par définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  nous avons les transitions

$$\mathbf{a}_0 \xrightarrow{(\overline{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, i})} (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, i) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{M-1} \xrightarrow{(\overline{\mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{a}_M, i})} (\mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{a}_M, i) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{a}_M$$

dans  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ . Tous les états visités satisfont  $(\bigwedge_{j \neq i} \neg q_j)$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, \mathbf{a}_{M-1} \models \left( (\bigwedge_{j=1}^{\alpha} \neg q_j) \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle \mathbf{X} (q_i \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle \mathbf{X} \mathfrak{t}(D)) \right)$ . Comme  $\mathfrak{M}$  n'a qu'un seul état,  $\mathfrak{t}(\exists r_i^+.D)$  énonce l'existence d'un chemin qui atteint un état vérifiant  $\left( (\bigwedge_{j=1}^{\alpha} \neg q_j) \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle \mathbf{X} (q_i \wedge \langle\langle \{1\} \rangle\rangle \mathbf{X} \mathfrak{t}(D)) \right)$  et tout le long  $(\bigwedge_{j \neq i} \neg q_j)$  est vérifié. D'ou  $\mathfrak{M}, \mathbf{a} \models \mathfrak{t}(\exists r_i^+.D)$ . La preuve dans l'autre sens est analogue.

5. Nous allons étendre  $\mathfrak{t}$ , mais nous modifions aussi la définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  pour coder la relation inverse sans avoir dans le langage logique la possibilité de le faire. Pour cela, on rajoute des états et des transitions. Avant de fournir la définition, voici ce que cela donnerait sur l'exemple de l'énoncé.



Nous donnons ci-dessous la nouvelle définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}} = (Agt, S, Act, act, \delta, L)$ , en répétant des parties déjà vues.

- $Agt \stackrel{\text{def}}{=} \{1\}, S \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{\mathcal{I}} \cup \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, i) \mid i \in [1, \alpha], \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\} \cup \{(i, \mathbf{b}, \mathbf{a}) \mid i \in [1, \alpha], \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{\mathcal{I}}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in r_i^{\mathcal{I}}\},$

- $Act \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(a, b, i)} \mid i \in [1, \alpha], a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}, (a, b) \in r_i^{\mathcal{I}}\} \uplus \{\overline{(i, b, a)} \mid i \in [1, \alpha], a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}, (a, b) \in r_i^{\mathcal{I}}\} \uplus \{\varepsilon\}$ .
- Pour  $s \in S$  tel que  $s = (a, b, i)$  ou  $s = (i, b, a)$ , nous avons  $\text{act}(1, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$ .
- Pour  $s \in S$  tel que  $s = a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ , nous avons  $\text{act}(1, s) \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(a, b, i)} \mid i \in [1, \alpha], b \in \Delta^{\mathcal{I}}, \text{tel que } (a, b) \in r_i^{\mathcal{I}}\} \cup \{\overline{(i, a, b)} \mid i \in [1, \alpha], b \in \Delta^{\mathcal{I}}, \text{tel que } (b, a) \in r_i^{\mathcal{I}}\}$ .
- Comme il n'y a qu'un seul agent, nous pouvons supposer que  $\delta$  est défini pour un sous-ensemble de  $S \times Act$  ( $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}, i \in [1, \alpha]$ ).
  - $\delta(a, \overline{(a, b, i)}) \stackrel{\text{def}}{=} (a, b, i); \delta((a, b, i), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} b$ ,
  - $\delta(a, \overline{(i, a, b)}) \stackrel{\text{def}}{=} (i, a, b); \delta((i, b, a), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} a$ ,
  - pour les autres paires dans  $S \times Act$ ,  $\delta$  n'est pas défini.
- Pour  $a \in S$ ,  $L(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{p_i \mid i \in [1, \beta], a \in A_i^{\mathcal{I}}\}$ ; pour  $(a, b, i) \in S$ ,  $L((a, b, i)) \stackrel{\text{def}}{=} \{q_i\}$ ; pour  $(i, b, a) \in S$ ,  $L((i, b, a)) \stackrel{\text{def}}{=} \{h_i\}$

La traduction  $t$  est étendue de la façon suivante:

$$t(\exists r_i^-.D) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X (h_i \wedge \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X t(D)).$$

La correction se prouve de façon analogue. En effet, considérons le cas  $C = \exists r_i^-.D$  dans la preuve par induction. Supposons que  $a \in (\exists r_i^-.D)^{\mathcal{I}}$ . Par définition de  $(\exists r_i^-.D)^{\mathcal{I}}$ , il existe  $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$  tel que  $(b, a) \in r_i^{\mathcal{I}}$  et  $b \in D^{\mathcal{I}}$ . Par hypothèse d'induction, nous avons  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, b \models t(D)$ . Comme  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  ne possède qu'un seul agent,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, s \models \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X \varphi$  est vérifiée s'il existe une action  $a$  telle que  $a \in \text{act}(1, s)$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, \delta(s, a) \models \varphi$ . Or  $(b, a) \in r_i^{\mathcal{I}}$ , donc par définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  nous avons les transitions

$$a \xrightarrow{\overline{(i, a, b)}} (i, a, b) \xrightarrow{\varepsilon} b$$

dans  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ . On peut vérifier que  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X (h_i \wedge \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X t(D))$  car en plus par définition de  $L$ ,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, (i, a, b) \models h_i$ . Comme précédemment, la preuve dans l'autre sens est analogue en remarquant cependant que si  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, a \models \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X (h_i \wedge \langle\langle\{1\}\rangle\rangle X t(D))$ , alors il existe nécessairement  $a \in S$  tel que

$$a \xrightarrow{\overline{(i, a, b)}} (i, a, b) \xrightarrow{\varepsilon} b,$$

d'où ensuite la propriété  $(b, a) \in r_i^{\mathcal{I}}$  par définition de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ . La preuve des autres cas est identique à celle pour  $\mathcal{ALC}$ .

Finalement, on obtient la borne PTIME pour le problème d'appartenance pour  $\mathcal{ALC}^+$  avec exactement les mêmes arguments de complexité que pour  $\mathcal{ALC}$ . En effet, on peut facilement vérifier que la taille de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  par rapport à taille de la première construction au plus double, et donc les instances utilisées pour MC(ATL) doublent au plus de taille, et donc le problème d'appartenance pour  $\mathcal{ALC}^+$  peut se résoudre en temps polynomial.

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{T}^* = \{A_1 \equiv C_1, \dots, A_m \equiv C_m\}$  une TBox de  $\mathcal{ALC}$  vérifiant les propriétés suivantes.

- Chaque  $A_i$  est un concept atomique, et  $A_i \equiv C_i$  est une abbréviation pour  $A_i \sqsubseteq C_i$  et  $C_i \sqsubseteq A_i$ .

- Pour  $i, j \in [1, m]$ , si  $A_j$  apparaît dans  $C_i$  alors  $j > i$ .
- Si  $i \neq j \in [1, m]$ , alors  $A_i$  et  $A_j$  sont (syntactiquement) distincts.

Une telle TBox  $\mathcal{T}^*$  est dite **acyclique**.

1. Définir brièvement un graphe acyclique à partir de  $\mathcal{T}^*$ , qui vous semble justifier l'appellation pour  $\mathcal{T}^*$ .
2. Etant donné une interprétation  $\mathcal{I}$ , montrer qu'il existe une interprétation  $\mathcal{J}$  telle que  $\mathcal{J} \models \mathcal{T}^*$ , les interprétations des rôles (atomiques) et des concepts atomiques différents de  $\{A_1, \dots, A_m\}$  sont identiques dans  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ .
3. Proposer un algorithme tel qu'étant donné une base de connaissance  $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$  avec  $\mathcal{T}$  acyclique, retourne une ABox  $\mathcal{A}'$  tel que  $\mathcal{K}$  est consistante si et seulement si  $(\emptyset, \mathcal{A}')$  est consistante. Il n'est pas demandé d'en montrer la correction.
4. Justifier la terminaison de votre algorithme et analyser sa complexité algorithmique.

**Solution de l'exercice 5.**

1. On peut définir le graphe  $(\{A_1, \dots, A_m\}, E)$  tel que  $(A_i, A_j) \in E$  ssi  $A_j$  apparaît dans  $C_i$ . Ce graphe est sans cycle grâce au point 2. de la définition.
2. Soit  $\mathcal{T}^* = \{A_1 \equiv C_1, \dots, A_m \equiv C_m\}$  une TBox acyclique dont  $B_1, \dots, B_n$  sont les concepts atomiques apparaissant dans  $\mathcal{T}^*$  mais distincts de  $A_1, \dots, A_m$ . Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation. Nous allons définir une séquence  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m$  d'interprétations.

- Pour  $i \in [1, m]$ ,  $\Delta^{\mathcal{I}_i} = \Delta^{\mathcal{I}}$ ,  $r^{\mathcal{I}_i} = r^{\mathcal{I}}$  pour les rôles  $r$  et  $(B_j)^{\mathcal{I}_i} = (B_j)^{\mathcal{I}}$  pour  $j \in [1, n]$ .
- Les interprétations des  $A_j$  avec  $j \in [1, m]$  se font comme suit:
  - $(A_m)^{\mathcal{I}_1} \stackrel{\text{def}}{=} (C_m)^{\mathcal{I}}$ ,  $(A_j)^{\mathcal{I}_1} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$  pour  $j < m$ .
  - $(A_m)^{\mathcal{I}_2} \stackrel{\text{def}}{=} (A_m)^{\mathcal{I}_1}$ ,  $(A_{m-1})^{\mathcal{I}_2} \stackrel{\text{def}}{=} (C_{m-1})^{\mathcal{I}_1}$ ,  $(A_j)^{\mathcal{I}_2} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$  pour  $j < m-1$ ,
  - ...
  - $(A_m)^{\mathcal{I}_m} \stackrel{\text{def}}{=} (A_m)^{\mathcal{I}_{m-1}}$ , ...,  $(A_2)^{\mathcal{I}_m} \stackrel{\text{def}}{=} (A_2)^{\mathcal{I}_{m-1}}$ ,  $(A_1)^{\mathcal{I}_m} \stackrel{\text{def}}{=} (C_1)^{\mathcal{I}_{m-1}}$ .

C'est facile de vérifier que  $\mathcal{I}_m$  est bien définie due à l'acyclicité de  $\mathcal{T}^*$ . Par ailleurs, les interprétations des rôles (atomiques) et des concepts atomiques différents de  $\{A_1, \dots, A_m\}$  sont identiques dans  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}_m$ . Finalement,  $\mathcal{I}_m \models \mathcal{T}^*$  comme  $\mathcal{I}_m$  vérifie chaque axiome  $A_j \equiv C_j$ .

3. Soit  $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$  une base connaissance avec une TBox acyclique  $\mathcal{T} = \{A_1 \equiv C_1, \dots, A_m \equiv C_m\}$ . On initialise  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$  et on construit  $\mathcal{A}_{j+1}$  en effectuant la substitution suivante, si possible:
  - Trouver une assertion  $a : D \in \mathcal{A}_j$  pour laquelle il existe  $A_i$  qui apparaît dans  $D$ , pour un  $i \in [1, m]$ .
  - Remplacer toutes les occurrences de  $A_i$  dans  $D$  par  $C_i$ .
4. Pour montrer la terminaison, on peut construire un graphe  $G_j = (V_j, E_j)$  à partir de  $\mathcal{A}_j$  construit comme décrit ci-dessous:

- $V_j$  est composé de  $\{A_1, \dots, A_m\}$  et de tous les noms d'individus  $a$  apparaissant dans  $\mathcal{A}_j$  (donc, c'est un ensemble constant pour tous les  $j$ ).
- $E_j$  contient une arête entre  $A_i$  et  $A_{i'}$  si  $A_{i'}$  apparaît dans  $C_i$  (partie constante de  $E_j$ ).
- $E_j$  contient aussi une arête entre  $a$  et  $A_i$  s'il y a une assertion  $a : C \in \mathcal{A}_j$  pour laquelle  $A_i$  apparaît dans  $C$  (partie  $E_j$  qui varie avec  $j$ ).

Comme  $\mathcal{T}$  est acyclique, chaque graphe  $G_j$  est acyclique et le reste après chaque remplacement. Soit  $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$  l'ensemble des noeuds dans  $G_j$  sans successeur (ou alternativement, l'ensemble des concepts atomiques  $A_i \equiv C_i$  dont  $C_i$  ne contient aucun  $A_k$  pour  $k \in [1, m]$ ). Le poids de  $G_j$  est défini comme la somme des longueurs de tous les chemins dans  $G_j$  d'un nom d'individu vers un concept atomique de  $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ . Comme  $G_j$  est acyclique, le poids est toujours défini. On peut montrer que tout remplacement effectué sur  $\mathcal{A}_j$  conduisant à  $\mathcal{A}_{j+1}$  décroît strictement le poids du graphe associé. D'où la terminaison. Le nombre d'étapes est polynomial en la taille de  $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$  mais par contre, les concepts dans l'ABox finale peuvent être de taille exponentielle à cause des différentes substitutions.