Devoir de logique à rendre au plus tard le 16 mai 2013

L'objectif est de montrer que le fragment $\exists^*\forall\forall\exists^*$ de la logique du premier ordre, appelé *classe de Gödel* est décidable, par des techniques de résolution.

Dans la suite, si t est un terme (ou une formule atomique), sa *profondeur* τ est définie par: $\tau(t) = 0$ si t est une variable ou une constante. $\tau(f(t_1, \dots, t_n)) = 1 + \max_i \tau(t_i)$ sinon.

1 La classe G et la classe $\mathcal{C}$

G est la classe des formules en forme prénexe $\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y \forall y' \exists z_1 \dots \exists z_m.\phi$ où ϕ est sans quantificateur, et ne contient aucun symbole de fonction. (Les symboles de prédicats sont arbitraires).

Soit B un ensemble fini de symboles de fonction binaires, A un ensemble fini de symboles de constantes et $\mathcal{P}$ un ensemble fini de symboles de prédicats. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des clauses C construites sur $A, B, \mathcal{P}$ et telles que:

1. $|Var(C)| \leq 2$ (C contient au plus deux variables distinctes, mais elles peuvent avoir plusieurs occurrences)
2. pour toute formule atomique L de C, $\tau(L) \leq 2$
3. pour toute formule atomique $P(s_1, \dots, s_n)$ de C, pour tout indice j, si $s_j = f_j(s_j^1, s_j^2)$ (avec $f_j \in B$), alors $\{s_j^1, s_j^2\} \supseteq Var(C)$.

Montrer que pour toute formule ψ de **G** , on peut construire un ensemble fini S de clauses de $\mathcal{C}$ tel que ϕ est satisfaisable si et seulement si S est satisfaisable.

2 Ordre sur les littéraux

Soit $\succ$ la relation sur les formules atomiques définie par: $L_1 \succ L_2$ si

1. $Var(L_1) \supseteq Var(L_2)$ et
2. - ou bien $\tau(L_1) > \tau(L_2)$
   - ou bien $\tau(L_1) = \tau(L_2) = 1$ et $|Var(L_1)| > |Var(L_2)|$

Cette relation est étendue aux littéraux en ignorant les négations: $\neg L \succ L'$ ssi $L \succ L'$ ssi $L \succ \neg L'$.

Soit $>_c$ la relation sur les formules atomiques closes (construites sur $B, A, \mathcal{P}$) définie par $L_1 >_c L_2$ si

- ou bien $\tau(L_1) > \tau(L_2)$
- ou bien $\tau(L_1) = \tau(L_2)$ et $L_1 = P(s_1, \dots, s_n), L_2 = Q(t_1, \dots, t_m)$ et $\{s_i \mid 1 \leq i \leq n, s_i \notin A\} \supsetneq \{t_i \mid 1 \leq i \leq m, t_i \notin A\}$

1. Montrer que $\succeq$ et $\geq_c$ sont des relations d'ordre et que $\geq_c$ est bien fondée.
2. Montrer que si $C = L \vee L_1 \vee \dots \vee L_k \in \mathcal{C}$ et, pour tout i, $L_i \not\succ L$ (i.e., L est maximal dans la clause) alors, pour toute substitution σ qui associe aux variables de C des termes clos non constant distincts, pour tout j, $L \succ L_j$ entraine $L\sigma >_c L_j\sigma$.

3 Système d'inférence

On considère les trois règles d'inférence suivantes (les clauses prémisses sont renommées de manière à ne pas partager de variable):

$$(R)\,\frac{C_1 \vee \neg L \quad C_2 \vee L'}{(C_1 \vee C_2)\sigma} \quad \begin{array}{l}\text{si } \sigma = \texttt{mgu}(L, L') \text{ et pour tout littéral } L_1 \text{ de } C_1,\\ L_1 \not\succ L \text{ et pour tout littéral } L_2 \text{ de } C_2,\ L_2 \not\succ L'\end{array}$$

$$(F)\,\frac{C_1 \vee L \vee L'}{(C_1 \vee L)\sigma} \quad \text{si } \sigma = \texttt{mgu}(L, L')$$

$$(I)\,\frac{C}{C\{x \mapsto \alpha\}} \quad \text{si } x \in Var(C),\ \alpha \in A \cup Var(C) \setminus \{x\}$$

1. Montrer que, si C, C' sont des clauses de $\mathcal{C}$ sans variable commune, alors si la règle (R) s'applique, la clause résultante est encore dans la classe $\mathcal{C}$. (**Note**: c'est la question la plus longue de l'énoncé).

2. Montrer de même que $\mathcal{C}$ est close par les règles F, I.

3. Montrer que les règles R, F, I forment un système réfutationellement complet pour la classe $\mathcal{C}$: $S \subseteq \mathcal{C}$ est insatisfaisable si et seulement si on peut déduire de S la clause vide en utilisant ces règles.
(**Note**: on rappelle que si $\geq$ est un ordre bien fondé sur un ensemble de variable propositionelles $\mathcal{Q}$, les stratégies ordonnées de résolution binaire et factorisation binaire

$$\frac{\neg P \vee C \quad P \vee C'}{C \vee C'}\ P \text{ maximal dans } C \text{ et dans } C' \qquad \frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}\ L \text{ maximal dans } C$$

sont réfutationellement complètes pour le calcul propositionel en forme clausale. On pourra ensuite s'inspirer de la preuve de complétude de la résolution pour les clauses du premier ordre et en particulier du lemme de relèvement.)

4 Terminaison

On note $\sqsubseteq$ la relation entre clauses définie par $C_1 \sqsubseteq C_2$ ssi il existe C_3 et un renommage ρ tels que $C_1 = (C_2 \vee C_3)\rho$.

1. Montrer que (à alphabets de symboles de fonction et de symboles de prédicats fixés) tout sous-ensemble de $\mathcal{C}$ clos par factorisation, contient, à renommage près, un nombre fini d'éléments maximaux pour $\sqsubseteq$.

2. En déduire une procédure de décision pour la classe $\mathcal{C}$: donner un algorithme qui, étant donné un ensemble fini S de clauses de $\mathcal{C}$ détermine si S est satisfaisable.

5 Une extension de la classe de Gödel

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: une formule sans variable libre $\psi = \exists x \forall y \exists z \forall u . \phi$ où ϕ ne contient ni quantificateur, ni symbole de fonction

Question ψ satisfaisable ?

Indication: on pourra réduire un probème de pavage