(A_+)	$T \vdash \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m + n = k$
(A_{f+})	$T \vdash \forall x.(\phi_+(\overline{n}, \overline{m}, x) \to x = \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m + n = k$
$(A_\times)$	$T \vdash \phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \times n = k$
$(A_{f\times})$	$T \vdash \forall x.(\phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, x) \to x = \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \times n = k$
$(A_=)$	$T \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$	Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$
$(A_\leq)$	$T \vdash \forall x.(x \leq \overline{n} \leftrightarrow (x = \overline{0} \vee \ldots \vee x = \overline{n}))$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$(A_{<>})$	$T \vdash \forall x. x \leq \overline{n} \vee x > \overline{n}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$

où $x \leq y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.\phi_+(z, x, y)$ et $x > y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.\phi_+(z, y, x) \wedge x \neq y$.

FIGURE 9.2 – Quelques propriétés simples de l'arithmétique sont prouvables dans T

9.5 Théories contenant l'arithmétique élémentaire

Nous avons montré que toute axiomatisation des entiers est incohérente ou incomplète. Néanmoins, cette preuve s'appuie sur une définition de l'ensemble des entiers, qui est elle-même un énoncé d'une théorie plus vaste (la théorie des ensembles). Nous nous sommes donc appluyés sur la cohérence de la théorie des ensembles pour montrer l'incomplétude de l'arithmétique.

L'objectif est ici de s'affranchir de la définition de l'ensemble des entiers pour montrer l'incomplétude, de manière à ce que la preuve d'incomplétude puisse elle-même être formalisée dans l'arithmétique (de Peano). Ceci permet de prouver le (second) théorème d'incomplétude de Gödel. Nous n'effectuerons pas vraiment cette traduction dans l'arithmétique de Peano, mais prendrons soin simplement de n'utiliser que des récurrences, et des ensembles définissables dans l'arithmétique. Il nous faut donc éviter les raisonnements qui s'appuient sur les modèles et la relation de satisfaction.

Par ailleurs nous montrons un résultat plus général : toute théorie qui contient l'arithmétique élémentaire (et donc pas seulement l'arithmétique élémentaire elle-même ou l'arithmétique de Peano) est incohérente ou incomplète.

On prouve ici l'indécidabilité des extensions de l'arithmétique élémentaire : dès que la théorie T vérifie les propriétés de la figure 9.2, elle est indécidable ou incohérente.

Lemme 9.5.1 *Si T est une théorie qui satisfait les propriétés de la figure 9.2, alors les fonctions récursives sont représentables dans T.*

Preuve:
On montre que l'ensemble des fonctions représentables dans T contient les fonctions récursives initiales, l'addition, la multiplication, légalité et est clos par composition et minimisation. Il suffit alors de conclure à l'aide du théorème 8.3.2.

La représentabilité de $=$ résulte de $(A_=)$. La représentabilité de $+$ (resp $\times$) est une conséquence de $(A_=), (A_+), (A_{f+})$ (resp. $(A_=), (A_\times), (A_{f\times})$), d'après l'exercice 184.

La clôture par composition est immédiate, car $T \vdash \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n})$ et $T \vdash \phi_{g_i}(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_q}, n_i)$ pour $1 \leq i \leq k$ entraine

$$T \vdash \exists z_1, \ldots, z_k.\phi_f(z_1, \ldots, z_k, \overline{n}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \phi_{g_i}(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_q}, z_i)$$

par complétude sémantique. (Aucune propriété de la figure 9.2 n'est nécessaire). On utilise $(A_=)$ pour la propriété 2 des fonctions représentables.

Soit maintenant $f(n_1, \ldots, n_k) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{m : \ g(n_1, \ldots, n_k, m) = 0\}$ et soit ϕ_g représentant g. Soit

$$\phi_f(x_1, \ldots, x_k, x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_g(x_1, \ldots, x_k, x, \overline{0}) \wedge \forall z.(z < x \to \neg\phi_g(x_1, \ldots, x_k, x, \overline{0}))$$

Montrons d'abord que $f(n_1, \ldots, n_k) = n$ entraine $T \vdash \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n})$. Comme ϕ_g représente g, $T \vdash \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n}, \overline{0})$ et, par définition, pour $p < n$, $g(n_1, \ldots, n_k, p) \neq 0$, donc $T \vdash \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{p}, \overline{0})$. Donc $T \vdash \forall x.(x \neq \overline{p} \vee \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x, \overline{0}))$ et par conséquent, grâce à $(A_\leq)$,

$$(1) \qquad T \vdash \forall x.(x < \overline{n} \to \neg\phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x, \overline{0}))$$

D'où $T \vdash \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n})$

Il reste à montrer la fonctionalité (on utilise l'exercice 184 pour la dernière propriété). Soit $f(n_1, \ldots, n_k) = n$. Remarquons d'abord que

$$T \vdash \forall x.(x \leq \overline{n} \wedge \phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x)) \to x = \overline{n}$$

en utilisant $(A_\leq)$ et (1). Grâce à $(A_{<>})$, il suffit donc de montrer

$$(3) \qquad T \vdash \forall x.(x > \overline{n} \to \neg\phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x))$$

Mais, par représentabilité de g, $T \vdash \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, \overline{n}, \overline{0})$. Donc

$$(2) \qquad T \vdash \forall x.(x > \overline{n} \to (\exists z.z < x \wedge \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, z)))$$

Mais, par définition de ϕ_f, $T \vdash \forall x.(\exists z.z < x \wedge \phi_g(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, z, \overline{0}))) \to \neg\phi_f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}, x)$. Donc (2) entraine (3), ce qui conclut.

Lemme 9.5.2 *Les axiomes de l'arithmétique élémentaire satisfont les propriétés de la figure 9.2.*

Preuve:
On définit $\phi_=(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x = y$, $\quad \phi_+(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y = z$, $\quad \phi_\times(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x \times y = z$, l'entier n étant représenté par le terme $\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} s^n(0)$.

Montrons successivement les propriétés de la figure 9.2 :

(A_+) revient à montrer que, pour tous n, m, $Q \vdash s^n(0) + s^m(0) = s^{n+m}(0)$. Il suffit de faire une récurrence sur m, en utilisant (A_3) et (A_4).

(A_{f+}) (comme $(A_{f\times})$ est immédiat avec ce codage.

$(A_\times)$ revient à montrer que, pour tous n, m, $Q \vdash s^n(0) \times s^m(0) = s^{n\times m}(0)$. À nouveau, on prouve le résultat par récurrence sur m : si $m = 0$, il suffit d'utiliser l'axiome (A_5). Sinon, par (A_6) : $Q \vdash s^n(0) \times s(s^{m-1}(0)) = (s^n(0) \times s^{m-1}(0)) + s^n(0)$. Par hypothèse de récurrence, $Q \vdash s^n(0) \times s^m(0) = s^{n\times(m-1)}(0) + s^n(0)$ et, par la propriété que nous venons de voir sur l'addition, $Q \vdash s^n(0) \times s^m(0) = s^{n\times(m-1)+n}(0)$.

$(A_=)$ On montre, par récurrence sur $\min\{n, m\}$ que $Q \vdash s^n(0) \neq s^m(0)$ en utilisant (A_1) pour le cas de base et (A_2) pour l'étape de récurrence.

$(A_\leq)$ Il nous faut montrer, pour tout n que $Q \vdash \forall x.((\exists y.x+y = s^n(0)) \to (x = 0 \vee x = s(0) \vee \cdots \vee x = s^n(0))$.

Montrons tout d'abord que $Q \vdash \forall x.(x \leq 0 \to x = 0)$. Autrement dit que $Q \vdash \forall x, y.(y + x = 0 \to x = 0)$. Notons que, $Q \vdash \forall x.(x = 0 \vee \exists z.x = s(z))$ d'après (A_7). Donc

$$Q \vdash \forall x, y.(y+x = 0 \to ((x = 0 \wedge y+0 = 0) \vee (\exists z.x = s(z) \wedge y+s(z) = 0)))$$

Donc, d'après $(A_3), (A_4)$,

$$Q \vdash \forall x, y.(y + x = 0 \to ((x = 0 \wedge y = 0) \vee (\exists z.x = s(z) \wedge s(y + z) = 0)))$$

Mais, d'après (A_1), $Q \vdash s(y + z) \neq 0$. Donc

$$Q \vdash \forall x, y, .(y + x = 0 \to (x = 0 \wedge y = 0))$$

ce qui est ce que nous voulions.

Maintenant, on montre, par récurrence sur n que $Q \vdash \forall x, y.(x + y = s^n(0) \to x = 0 \vee x = s(0) \vee \ldots \vee x = s^n(0)$. Le cas de base est celui que nous venons de voir. Dans le cas général, par (A_7),

$$Q \vdash \forall x, y.(y+x = s^n(0) \to ((x = 0 \wedge y+0 = s^n(0)) \vee (\exists.z.x = s(z) \wedge y+s(z) = s^n(0))))$$

On utilise alors (A_3) d'une part et (A_4) puis (A_2) d'autre part :

$$Q \vdash \forall x, y.(y+x = s^n(0) \to ((x = 0 \wedge y = s^n(0)) \vee (\exists z.x = s(z) \wedge y+z = s^{n-1}(0))))$$

Par hypothèse de récurrence,

$$Q \vdash \forall x, y.(y+x = s^n(0) \to ((x = 0 \wedge y = s^n(0)) \vee (\exists z.x = s(z) \wedge (z = 0 \vee \cdots \vee z = s^{n-1}(0))))$$

Ce qui donne la propriété voulue.

$(A_{<>})$ On prouve, par récurrence sur n, que, pour tout n, $Q \vdash \forall x.(x \leq s^n(0) \vee s^n(0) \leq x)$. Quand $n = 0$, $Q \vdash \forall x.x + 0 = x$ donc $Q \vdash \forall x, \exists z.z + 0 = x$: $Q \vdash \forall x.x \geq 0$.

Pour la récurrence, on utilise (A_7) : $Q \vdash x = 0 \vee \exists z.x = s(z)$. Comme nous l'avons vu, $Q \vdash 0 \leq s^n(0)$. De plus, par hypothèse de récurrence, $Q \vdash \forall z.(z \leq s^{n-1}(0) \vee z \geq s^{n-1}(0))$.

De plus, en utilisant (A_4) et (A_2), $Q \vdash \forall z.(s(z) \leq s^n(0)) \leftrightarrow z \leq s^{n-1}(0)$ et $Q \vdash \forall z.(s(z) \geq s^n(0) \leftrightarrow z \geq s^{n-1}(0))$. Donc $Q \vdash \forall x, z.(x = s(z) \to (x \leq s^n(0) \vee x \geq s^n(0)))$, ce qui conclut.

Si l'on accepte le lemme 9.3.1, ce résultat entraine l'indécidabilité (et donc l'incomplétude) de l'arithmétique élémentaire. Cependant, le lemme 9.3.1 utilise un raisonnement par l'absurde : il ne permet pas de construire la formule θ telle que $T \not\vdash \theta$ et $T \not\vdash \neg\theta$. Plus précisément, on ne peut pas constuire la formule $\phi_P(x, y)$ qui représente P. Et on ne peut donc pas représenter l'énoncé "ϕ_P représente P". La preuve de ce lemme ne peut donc être conduite dans l'arithmétique de Peano.

Exercice 191
Montrer que l'arithmétique de Peano est indécidable.

Exercice 192
Montrer que l'arithmétique de Peano contient strictement l'arithmétique élémentaire et est strictement contenue dans $Th(\mathbb{N})$.

Exercice 193

1. Montrer que, dans l'arithmétique de Peano, $\leq$ (défini par $x \leq y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.x + z = y$) est une relation d'ordre (i.e. les axiomes des relations d'ordre sont prouvables).
2. Donner un modèle dénombrable de l'arithmétique de Peano dans lequel $\leq$ n'est pas un ordre bien fondé
3. A-t-on $PA \vdash \forall x, y.x \leq y \vee y \leq x$?

Exercice 194 (7)
Montrer que, si l'on retire la propriété $(A_{\leq})$ des propriétés de la figure 9.2, il existe des théories cohérentes qui satisfont ces propriétés et dans lesquelles certaines fonctions récursives ne sont pas représentables.

Corollaire 9.5.1 *L'arithmétique élémentaire et l'artithétique de Peano sont des théories incohérentes ou incomplètes.*