Examen partiel, Logique et calculabilité, L3

10 novembre 2010

Durée: 3h. **Document autorisés:** tous. **Résultats que vous pouvez utiliser:** ceux du cours (Si vous voulez utiliser un résultat vu en TD, il faut le redémontrer).

Les exercices sont indépendants. Les points attribués à chaque question, ainsi que la longueur des solutions sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1

[4 points] Donner (sans démonstration) l'arbre sémantique (arbres des interprétations partielles) de l'ensemble de clauses suivant, où $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$ (ordre d'énumération des variables propositionnelles). Quels sont les modèles de cet ensemble de clauses ?

$$P_1 \vee \neg P_2, \quad \neg P_1 \vee P_3 \vee P_4, \quad \neg P_3 \vee P_4, \quad P_2 \vee P_4, \quad \neg P_1 \vee \neg P_4, \quad P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \vee \neg P_3$$

Montrer comment déduire $\neg P_3$ de cet ensemble de clauses, par résolution binaire et factorisation binaire.

Exercice 2

Dans ce exercice $\mathcal{P}$ est un ensemble de variables propositionnelles. Une *fonction de sélection* est une application qui associe à toute clause $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ (où $n \geq 1$) l'un des littéraux L_i. Étant donnée une fonction de sélection f, on considère la restriction suivante de la résolution:

$$(R_f) \qquad \frac{P \vee C \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'} \qquad \text{Si } f(P \vee C) = P \textit{ ET } f(\neg P \vee C') = \neg P$$

La règle de factorisation binaire et la règle R_f définissent une relation de déduction $\vdash_f$ pour le calcul propositionnel en forme clausale.

1. Montrer que $F + R_f$ n'est pas réfutationnellement complète: donner un exemple de fonction de sélection f et d'un ensemble de clauses $\mathcal{E}$ insatisfaisable tel que $\mathcal{E} \not\vdash_f \bot$.
   [9 lignes, 2 points]

2. Une clause *de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses de Horn, on note $\mathcal{E}^* = \{C \mid \mathcal{E} \vdash_f C\}$ et $I_0 = \mathcal{E}^* \cap \mathcal{P}$.

   (a) Montrer que R_f est réfutationellement complète pour les clauses de Horn et pour toutes les fonctions f telles que $f(C) \in \mathcal{P}$ seulement si $C \in \mathcal{P}$. (**Ind**: on pourra s'aider de l'interprétation I_0). [9 lignes, 3 points]

(b) (**Hors barême**) Généraliser aux clauses de Horn et à une fonction f quelconque. (**Ind**: On pourra considérer la suite définie par $I_{n+1} = I_n \cup \{P \in \mathcal{P} \mid \exists P \vee \neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_k \in \mathcal{E}^*,\ f(C) = P,\ Q_1, \ldots, Q_k \in I_n\}$). [16 lignes]

Exercice 3

[30 lignes, 7 points] Pour chacun des jugements suivants dire s'ils sont prouvables dans NK_0 et s'ils sont prouvables dans NJ_0. Lorsqu'ils sont prouvables, en donner une preuve. Lorsqu'ils ne sont pas prouvables, le démontrer. (P, Q, R sont des variables propositionnelles).

1. $P \to Q \vdash Q \to P$
2. $P \wedge \neg P \vdash \bot$
3. $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$
4. $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Exercice 4

Dans *tout cet exercice*, on considère un ensemble vide $\mathcal{F}$ de symboles de fonction et un ensemble de symboles de prédicats ne contenant qu'un seul symbole binaire: $\mathcal{P} = \{\ R\}$. Dans la suite une *structure* sera une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure pour $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{R\}$.

1. [11 lignes, 2 points] Montrer que la formule suivante est satisfaisable mais n'a pas de modèle fini:

$$\begin{array}{rcl}\phi_\infty & = & (\forall x \forall y \forall z.\ \neg R(x,x)\ \wedge\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))) \\ & & \wedge\ \forall x \exists x'.R(x,x')\ \wedge\ \exists x', y'.R(x', y')\end{array}$$

2. [45 lignes, 5 points]Dans cette question, ψ est une formule arbitraire sans variable libre. A_{eq} est la formule exprimant la réflexivité, la symétrie et la transitivité de R. L'objectif de la question est de montrer que $\psi \wedge A_{eq}$ est satisfaisable si et seulement si elle a un modèle fini (de cardinal au plus le nombre de quantificateurs dans ψ). On considérera donc uniquement les modèles de ψ dans lesquels R est interprété comme une relation d'équivalence.

   On suppose sans perte de généralité que ϕ est en forme prénexe.

   (a) Montrer que si $\psi \wedge A_{eq}$ a un modèle, alors elle a un modèle dans lequel R est interprété comme l'égalité. (**Ind**: considérer une structure quotient).

   (b) Montrer que si $\psi \wedge A_{eq}$ a un modèle, alors elle a un modèle dont le nombre d'éléments est au plus le nombre de variables de ψ. (**Ind**: on pourra généraliser la propriété aux formules qui ont des variables libres et utiliser une récurrence sur la formule).