Logique et Calculabilité (partie 2) 2011. Examen

26 mai 2011. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Le barême est indicatif (noter qu'il laisse le choix des exercices à traiter). Tous les résultats et les preuves du cours peuvent être utilisés en les mentionnant. Les exercices vus en TD doivent être redémontrés s'ils sont utilisés.

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, qui, si n est le code d'une machine de Turing M ($n =< M >$), et m est le code d'un mot w, associe à (n, m, k) l'entier correspondant au mot sur le ruban, après k étapes de calcul de M sur l'entrée w. f vaut 0 si n n'est pas le code d'une machine de Turing ou bien m n'est pas le code d'un mot. f est-elle récursive ? récursive primitive ? récursive partielle ? Justifier.
[15 lignes, 4 points]

Exercice 2

$\geq$ est défini comme dans la figure 3. Montrer qu'il existe des modèles de l'arithmétique élémentaire (dont les axiomes sont rappelés dans la figure 2) dans lesquels $\geq$ n'est pas une relation d'ordre, mais que, dans PA, on peut démontrer que $\geq$ est une relation d'ordre.
[24 lignes, 7 points]

Exercice 3

Si on supprime ($A_{f\times}$) dans les propriétés de la figure 3, montrer qu'il existe une théorie qui satisfait les (autres) propriétés, mais dans laquelle il existe des fonctions récursives non représentables.
[2 lignes, 3 points]

Exercice 4

Q est l'ensemble des axiomes de l'arithmétique élémentaire, supposée cohérente, rappelé dans la figure 2.

1. Montrer que $R \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid \exists \phi(x), n =< \phi(x) >, Q \vdash \phi(\overline{n})\}$ n'est pas récursif.

2. Montrer que le prédicat P suivant n'est pas récursif :

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{ < \phi(x) > \mid \phi(x) \text{ représente dans } Q \text{ un prédicat récursif à 1 argument} \}$$

[8 lignes, 7 points]

Exercice 5

On considère la théorie $\mathcal{T}$ engendrée par les axiomes de l'égalité ainsi que les axiomes de la figure 1, supposant que $\mathcal{F} = \{f(1), g(1), a(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est cohérente
2. Montrer que $\mathcal{T}$ est récursive
3. $\mathcal{T}$ est elle complète ?

[22 lignes, 7 points]

(T_1)	$a = f(a)$	
(T_2)	$\forall x. f(g(x)) = x \wedge g(f(x)) = x$	
$(T_{3,n})$	$\forall x. x = f^n(x) \rightarrow x = a$	Pour tout $n \geq 1$
$(T_{4,n})$	$\forall x_1, \ldots, x_n, \exists x. x \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x \neq x_n$	Pour tout $n \geq 1$

Figure 1 – Axiomes de la théorie $\mathcal{T}$

$$
\begin{array}{lcc}
(A_1) & \forall x. & s(x) \neq 0 \\
(A_2) & \forall x, y. & s(x) = s(y) \Rightarrow x = y \\
(A_3) & \forall x. & x + 0 = x \\
(A_4) & \forall x, y. & x + s(y) = s(x + y) \\
(A_5) & \forall x. & x \times 0 = 0 \\
(A_6) & \forall x, y. & x \times s(y) = (x \times y) + x \\
(A_7) & \forall x. & x \neq 0 \Rightarrow \exists y. x = s(y)
\end{array}
$$

FIGURE 2 – Axiomes de l'arithmétique élémentaire

$$
\begin{array}{lll}
(A_+) & T \vdash \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k}) & \text{Pour tous } m, n, k \in \mathbb{N} \text{ tels que } m + n = k \\
(A_{f+}) & T \vdash \forall x.(\phi_+(\overline{n}, \overline{m}, x) \rightarrow x = \overline{k}) & \text{Pour tous } m, n, k \in \mathbb{N} \text{ tels que } m + n = k \\
(A_\times) & T \vdash \phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k}) & \text{Pour tous } m, n, k \in \mathbb{N} \text{ tels que } m \times n = k \\
(A_{f\times}) & T \vdash \forall x.(\phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, x) \rightarrow x = \overline{k}) & \text{Pour tous } m, n, k \in \mathbb{N} \text{ tels que } m \times n = k \\
(A_=) & T \vdash \overline{m} \neq \overline{n} & \text{Pour tous } m, n \in \mathbb{N} \text{ tels que } m \neq n \\
(A_\leq) & T \vdash \forall x.(x \leq \overline{n} \leftrightarrow (x = \overline{0} \vee \ldots \vee x = \overline{n})) & \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \\
(A_{<>}) & T \vdash \forall x. x \leq \overline{n} \vee x > \overline{n} & \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}
\end{array}
$$

où $x \leq y \overset{\text{def}}{=} \exists z.\phi_+(z, x, y)$ et $x > y \overset{\text{def}}{=} \exists z.\phi_+(z, y, x) \wedge x \neq y$.

FIGURE 3 – Quelques propriétés simples de la théorie T

Solution

Exercice 2

On considère un modèle $\mathcal{M}$ de domaine $\mathbb{N} \uplus \{a, b\}$ avec $s_{\mathcal{M}}(a) = a$, $s_{\mathcal{M}}(b) = b$, $a +_{\mathcal{M}} n = n +_{\mathcal{M}} a = a$, $a +_{\mathcal{M}} b = b, b +_{\mathcal{M}} a = a$ et $a \times_{\mathcal{M}} 0 = b \times_{\mathcal{M}} 0 = 0$, $a \times_{\mathcal{M}} n = a$ si $n \neq 0$ et $b \times_{\mathcal{M}} n = b$ si $n \neq 0$. Enfin, pour tout $n \in D_{\mathcal{M}}$, $n \times_{\mathcal{M}} a = a$ et $n \times_{\mathcal{M}} b = b$. On vérifie que $\mathcal{M}$ satisfait les axiomes de l'arithmétique élémentaire : pour la plupart des axiomes, c'est une conséquence des définitions. Restent (A_4) et (A_6).

(A_4) :
- si $c \in \{a, b\}$, $x +_{\mathcal{M}} s_{\mathcal{M}}(c) = x +_{\mathcal{M}} c = c = s_{\mathcal{M}}(c) = s_{\mathcal{M}}(x +_{\mathcal{M}} c)$
- Si $c \in \mathbb{N}$ et $x \in \{a, b\}$, $x +_{\mathcal{M}} s_{\mathcal{M}}(c) = x = s_{\mathcal{M}}(x) = s_{\mathcal{M}}(x +_{\mathcal{M}} c)$
- si $x, c \in \mathbb{N}$, $x +_{\mathcal{M}} s_{\mathcal{M}}(c) = (x + c) + 1 = s_{\mathcal{M}}(x +_{\mathcal{M}} c)$

(A_6) :
- si $c \in \{a, b\}$, $x \times_{\mathcal{M}} s_{\mathcal{M}}(c) = x \times_{\mathcal{M}} c = c = (x \times_{\mathcal{M}} c) +_{\mathcal{M}} x$
- si $c \in \mathbb{N}$ et $x \in \{a, b\}$ alors $x \times_{\mathcal{M}} s_{\mathcal{M}}(c) = x = (x \times_{\mathcal{M}} c) +_{\mathcal{M}} x$
- si $c, x \in \mathbb{N}$, c'est l'opération habituelle.

Ppourtant $a \leq_{\mathcal{M}} b$ et $b \leq_{\mathcal{M}} a$: $\mathcal{M} \models \exists x, y.x \neq y \wedge x \leq y \wedge y \leq x$, ce qui contredit la propriété d'antisymétrie.

$PA \vdash \forall x.x + 0 = x$ donc $PA \vdash \forall x.x \leq x$. $PA \vdash \forall x.(x \leq 0 \wedge 0 \leq x \Rightarrow x = 0$. On note que $PA \vdash \forall x, y.(x + y = x \to y = 0)$. Par récurrence sur x et par commutativité de l'addition. D'où l'anti-symétrie : $PA \vdash (\exists z.x+z = y \wedge \exists z'.y+z' = x) \to \exists z, z'.(x+z)+z' = x \wedge y+z' = x$. Comme dans PA l'addition est associative $PA \vdash (x + z) + z' = x \to z = z' = 0$.

De même, la transitivité de $\geq$ est une conséquence de l'associativité de $+$.

Exercice 3

En fait, l'arithmétique de Persburger va satisfaire ces propriétés, avec $\phi_\times(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \top$. Or l'arithmétique de Presburger est décidable, donc on ne peut pas y représenter les fonctions récursives.

Exercice 4

1. Si R était récursif, il serait représentable, par une formule ψ_R. Alors $Q \vdash \psi_R(\overline{\neg\psi_R})$ ssi $< \neg\psi_R > \in R$ (puisque ψ_R représente R) et $< \neg\psi_R > \in R$ ssi $Q \vdash \neg\psi_R(\overline{< \neg\psi_R >})$, par définition de R. D'où une contradication (puisque $Q \vdash \psi_R(\overline{< \neg\psi_R >})$ ou $Q \vdash \neg\psi_R(\overline{\neg\psi_R})$, par définition de la représentabilité).
2. Si P était récursif, alors l'ensemble $P' \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid n =< \phi(x) > \in P, Q \vdash \phi(\overline{n})\}$ serait récursif puisque, pour $< \phi(x) > \in P$, $\{n \in \mathbb{N} \mid Q \vdash \phi(\overline{n})\}$ est récursif. Par le même argument qu'à la question précédente, on obtient une contradiction : P' serait représentable par $\psi_{P'}$ et $Q \vdash \psi_{P'}(\overline{< \neg\psi_{P'} >})$ ssi $Q \vdash \neg\psi_{P'}(\overline{< \neg\psi_{P'} >})$

Exercice 5

1. On prend comme modèle $\mathbb{Z} \uplus \{\infty\}$ avec f successeur et g prédécesseur et a, ∞. Supposant $s(\infty) = p(\infty) = \infty$. On obtient un modèle de la théorie, qui est donc cohérente.
2. Considérons une conjonction γ de formules atomiques et une variable x. γ peut être prouvée équivalente dans $\mathcal{T}$ à une disjonction de formules $\gamma_0^i \wedge \gamma_1^i$ où γ_0^i ne contient pas x, γ_1^i est de l'une des formes suivantes :

– $x = u$ où x n'apparait pas dans u
– $x \neq u_1 \wedge \ldots \wedge x \neq u_n$ où x n'apparait pas dans $u_1, \ldots, u_n$
Montrons cette propriété :

(a) Notant que T_2, T_1 entrainent que $g(a) = a$, par T_2 et les axiomes de l'égalité, toute formule atomique $u = v$, qui contient une occurrence de la variable x, est équivalente à une formule $x = w$ où $w = f^n(y)$ ou bien $w = g^n(y)$ ou bien $w = a$ pour une certaine variable y et un entier n.

(b) Par $(T_{3,n})$, $(T_1), (T_2)$ $x = f^n(x)$ est équivalent à $x = g^n(x)$ est équivalent à $x = a$.

(c) Par les axiomes de légalité $x = u \wedge \phi$ est équivalent à $x = u \wedge \phi\{x \mapsto u\}$.

en simplifiant chaque formule atomique, en utilisant les deux premières étapes, puis en mettant en forme normale disjonctive et en appliquant la dernière transformation, on obtient la forme voulue.

$\exists x.\gamma$ est alors équivalente à $\bigvee_i \gamma_0^i$. Il suffit de montrer que, pour chaque i, $\mathcal{T} \vdash (\exists x.\gamma_0^i \wedge \gamma_1^i) \leftrightarrow \gamma_0^i$, ce qui est une conséquence de $(T_{4,n})$.

D'où l'élimination des quantificateurs : la théorie est récursive.

3. Comme il y a élémination des quantificateurs, toute formule close est (prouvablement) équivalente à une formule sans variable. Or toute formule sans variable est (après simplification comme dans la question précédente) ou bien $\top$ ou bien $\perp$. Il en résulte que la théorie est complète.