Logique informatique 2017-2018. Examen

24 mai 2018. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Les appareils électroniques sont interdits. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstration.

Exercice 1

On se donne un symbole de prédicat binaire $<$ et on considère la théorie $\mathcal{T}$ formée des propositions suivantes.
A (antireflexivité)

$$\forall x\ \neg(x < x)$$

T (transitivité)

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z))$$

N (non trivialité)

$$\exists x \exists y\ (x < y)$$

D (densité)

$$\forall x \forall y\ (x < y \Rightarrow \exists w\ (x < w \wedge w < y))$$

1. La théorie $\mathcal{T}$ a-t-elle un modèle ?
2. La théorie $\mathcal{T}$ a-t-elle un modèle fini ?
3. La théorie $\mathcal{T}$ a-t-elle un modèle dénombrable ?

Exercice 2

On considère l'arithmétique de Peano PA à laquelle on ajoute un constante c_r pour chaque nombre réel r et l'infinité d'axiomes $\mathcal{T} = \{\neg c_r = c_{r'} \mid r \neq r'\}$.

1. Soit Γ un sous-ensemble fini de $PA \cup \mathcal{T}$.
   Montrer que le séquent $\Gamma \vdash \bot$ n'a pas de démonstration en déduction naturelle classique.
2. Montrer que la théorie $PA \cup \mathcal{T}$ a un modèle $\mathcal{M}$.
3. Quel est le cardinal de ce modèle ?
4. Soit $\mathcal{N}$ le sous ensemble de $\mathcal{M}$ défini par $\mathcal{N} = \{[\![S^n(0)]\!] \mid n \in \mathbb{N}\}$.
   Montrer que l'ensemble $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ est non vide.
5. Le schéma de récurrence est-il valide dans $\mathcal{M}$?

Exercice 3

Soient $\mathcal{F} = \{f\}, \mathcal{P} = \{=\}$ où f est un symbole de prédicat unaire.

On considère l'ensemble d'axiomes $\mathcal{T}$ contenant les axiomes de l'égalité ainsi que les deux axiomes

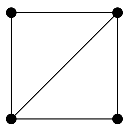
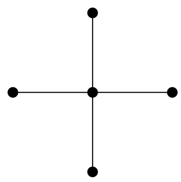
$$\forall x, y.\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y \qquad\qquad \forall x, y. x = y \vee x = f(y)$$

1. Donner deux modèles non-élémentairement équivalents de $\mathcal{T}$
2. Donner (en le justifiant) deux formules ϕ_1, ϕ_2 telles que $\mathcal{T} \cup \{\phi_1\}$ et $\mathcal{T} \cup \{\phi_2\}$ engendrent des théories complètes et $\mathcal{T} \uplus \{\phi_1\} \not\models \phi_2$.

Exercice 4

Soient $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{=, R\}$ où R est binaire.

On considère les deux graphes suivants (non orientés, donc l'interprétation de R est symétrique dans les deux cas).

$\mathcal{G}_1 =$  $\mathcal{G}_2 =$ 

Existe-t-il un isomorphisme partiel de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$ dont le domaine a 3 éléments ? Plus généralement, quel est le cardinal maximal du domaine d'un isomorphisme partiel de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$?

Exercice 5

Parmi les jugements suivants, lesquels sont prouvables en déduction naturelle intuitioniste ? Justifier.

1. $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
2. $\neg P \rightarrow \neg Q \vdash Q \rightarrow P$
3. $\forall x.P(x) \vee Q(x),\ \exists x \neg P(x) \vdash \exists x.Q(x)$

Solution

Exercice 1

1. Oui, $\mathbb{R}$ avec sa relation d'ordre strict usuelle satisfait les 3 axiomes.

   1 point. Taux de réussite : 94%
2. Non. Si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$, soient $a_1, b_1 \in D_{\mathcal{M}}$ tels que $a_1 <_{\mathcal{M}} b_1$ (c'est possible par non trivialité). Par récurrence sur n, il existe $a_1, \ldots, a_n$ distincts tels que $a_1 < a_2 \cdots < a_n < b_1$. Le cas de base est donné ci-dessus. Par densité on construit $a_n <_{\mathcal{M}} a_{n+1} <_{\mathcal{M}} b_1$. Par transitivité $a_i <_{\mathcal{M}} a_{n+1}$ pour tout $i \leq n$. Par irréflexivité, $a_i \neq a_{n+1}$ pour $i \leq n$. Ainsi, si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$, la suite a_n est une suite d'éléments tous distincts du domaine de $\mathcal{M}$, qui est donc infini.

   Commentaires : il faut mettre en évidence l'utilisation de tous les axiomes ; ils sont tous nécessaires sans quoi il existe un modèle fini. Par ailleurs, la preuve formelle demande de faire explicitement une récurrence.
   2.1 points. Taux de réussite : 77%
3. Oui, $\mathbb{Q}$ avec la relation d'ordre strict est un modèle.

   0.5 points. Taux de réussite : 88%

Exercice 2

1. Si Γ est un sous-ensemble fini de formules de $PA \cup \mathcal{T}$, soit $E = \{c_r \mid \exists r'.c_r \neq c_{r'} \in \Gamma \cap \mathcal{T} \vee c_{r'} \neq c_r \in \Gamma \cap \mathcal{T}\}$. E est un ensemble fini $\{c_{r_1}, \ldots, c_{r_n}\}$. On considère l'interprétation dans $\mathbb{N}$ qui à chaque constante c_{r_i} associe $i \in \mathbb{N}$. Tous les autres symboles sont interprétés de manière standard. On obtient alors un modèle de Γ puisque $\mathbb{N}$ est un modèle de PA et l'interprétation des symboles de constante distincts sont des entiers distincts. Par correction de la déduction naturelle on ne peut donc pas dériver $\perp$.

   Commentaires : Les plus grosses erreurs consistaient à prétendre avoir un modèle de $PA \cup \mathcal{T}$. L'existence d'un tel modèle est d'ailleurs l'objet de la question suivante.
   Les tentatives pour montrer directement qu'on ne peut pas construire de preuve de $\perp$ se sont avérées des échecs. En effet, il ne faut pas oublier que PA contient le schéma de récurrence, dont un nombre fini d'instances arbitraires peuvent faire partie de Γ. Il est très difficile de transformer les preuves contenant ces instances arbitraires.
   2.2 points. Taux de réussite 20%
2. Si $PA \cup \mathcal{T}$ n'avait pas de modèle, par compacité, il y aurait un sous-ensemble fini instatisfaisable, ce qui contredit la question 1.

   Commentaires : Plusieurs copies ont proposé un modèle. Mais ces constructions sont toutes incorrectes. D'ailleurs, la plupart du temps, le modèle était proposé sans preuve. La première question était là pour guider dans la preuve d'existence, sans construire explicitement ce modèle. L'exercice de TD sur le théorème de Löwenheim-Skolem aurait aussi dû aider à répondre à cette question puisqu'il s'agit exactement du même argument.
   1.8 points. Taux de réussite : 38%.

3. Le modèle est nécessairement non dénombrable : à cause de $\mathcal{T}$, il contient au moins $|\mathbb{R}|$ éléments.

   Commentaires : Deux types d'erreurs : la première consistait à utiliser une construction erronée de la question précédente. La deuxième à prétendre que le modèle a le même cardinal que $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas prouvé.
   0.4 points. Taux de réussite 46%.
4. $\mathcal{N}$ est dénombrable donc $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ est non dénombrable,

   Commentaires : On ne peut pas affirmer sans preuve que $\mathcal{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
   0.4 points. Taux de réussite 41%
5. Oui puisque $\mathcal{M}$ est un modèle de PA

   Commentaires : beaucoup de réponses fausses (et évidemment dont la justification est absente ou incorrecte).
   1.3 points. Taux de réussite 19%.

Exercice 3

1. $\mathcal{S}_1$ est la structure à 1 élément dans laquelle f est l'identité. $\mathcal{S}_2$ est la structure à deux éléments dans laquelle f échange les deux éléments. $=$ est interprété dans les deux structures comme légalité. Dans les deux cas l'interprétation de f est une fonction injective, le premier axiome est donc satisfait dans les deux structures. Dans les deux cas, si on choisit deux éléments distincts dans la structure, l'un est l'image de l'autre par l'interprétation de f. Le deuxième axiome est donc satisfait dans les deux structures.
   Les deux modèles ne sont pas élémentairement équivalents puisque $\forall x, y.x = y$ est satisfaite dans $\mathcal{S}_1$ et pas dans $\mathcal{S}_2$.

   Commentaires : Pour justifier que deux structures ne sont pas élémentairement équivalentes, il faut et il suffit de donner une formule satisfaite dans une structure et pas dans l'autre. L'argument de cardinalité est incorrect : avec d'autres symboles de prédicat on peut trouver des structures de cardinaux distincts et qui sont élémentairement équivalentes.
   2.2 points. Taux de réussite 60%
2. On choisit pour ϕ_1, $\forall x, y.x = y$ et pour ϕ_2, $\neg\phi_1$. $\mathcal{S}_1 \models \mathcal{T} \cup \{\phi_1\}$, $\mathcal{S}_2 \models \mathcal{T} \cup \{\phi_2\}$.
   De plus, si $\mathcal{M} \models \mathcal{T} \cup \{\phi_1\}$, $\mathcal{M}$ ne contient qu'un seul élément (modulo l'interprétation de $=$). La théorie engendrée par $\mathcal{T} \cup \{\phi_1\}$ est donc la théorie de $\mathcal{S}_1$ et est donc complète.
   De même, si $\mathcal{M} \models \mathcal{T} \cup \{\phi_2\}$, $\mathcal{M}$ contient exactement deux éléments (modulo $=$) et l'interprétation de f doit échanger ces deux éléments. $\mathcal{M}$ (modulo $=$) est donc isomorphe à $\mathcal{S}_2$: la théorie engendrée est celle de $\mathcal{S}_2$ et est donc complète.
   Par cohérence de $\mathcal{T} \cup \{\phi_1\}$, $\mathcal{T} \cup \phi_1 \not\models \phi_2$.

   Commentaires : il était aussi correct de choisir $\phi_2 = \perp$ puisqu'il nétait pas spécifié que les théories étaient cohérentes.
   2.1 points. Taux de réussite 42%

Exercice 4

Oui. Si a, b, c sont les sommets de $\mathcal{G}_1$ tels que aR_1b, bR_1c et $a \not R_1 c$, et a', b', c' 3 sommets de $\mathcal{G}_2$ tels que $a'R_2b'$, $b'R_2c'$ (b' est le sommet central), $h : a \mapsto a', b \mapsto b', c \mapsto c'$ est un isomorphisme partiel puisque, pour tous $x, y \in \{a, b, c\}$, xR_1y ssi $h(x)R_2h(y)$.

Il n'y a pas d'isomorphisme partiel de domaine à 4 éléments. En effet, si h est une application injective de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$, les 3 sommets b, c, d de $\mathcal{G}_1$ tels que bR_1c, cR_1d, dR_1b ont pour image 3 sommets distincts $h(b), h(c), h(d)$ de $\mathcal{G}_2$ tels que $h(b) \not R_2 h(c)$ ou $h(c) \not R_2 h(d)$ ou $h(d) \not R_2 h(b)$, puisque $\mathcal{G}_2$ ne contient pas de clique à 3 sommets. h ne peut donc pas être un isomorphisme partiel.

Commentaires : dans deux copies l'isomorphisme partiel est incorrect, ce qui montre bien qu'il faut justifier la réponse donnée en se référant à la définition d'isomorphisme partiel. La majorité des copies ne contient pas de justification.
2.7 points. Taux de réussite 69%.

Exercice 5

1. Pas prouvable car pas valide (par correction du système de preuve). Voici un contre-modèle : la structure a 3 mondes a, b, c, $a \leq b$ et $a \leq c$. $I(a) = \emptyset, I(b) = \{P\}, I(c) = \{Q\}$.
   $a \not\Vdash P \to Q$ puisque $b \geq a$ et $b \Vdash P$ et $b \not\Vdash Q$
   $a \not\Vdash Q \to P$ puisque $c \geq a$ et $c \Vdash Q$ et $c \not\Vdash P$.

   Commentaires : Montrer directement qu'il n'existe aucune preuve est possible, mais difficile. Il est beaucoup plus simple de donner un contre-modèle. Si l'on veut montrer directement qu'il n'existe pas de preuve, on ne peut pas utiliser sans le démontrer que si $\vdash \phi \vee \psi$ est prouvable, alors $\vdash \phi$ est prouvable ou $\vdash \psi$ est prouvable. Et la preuve de ce résultat n'est pas triviale car il y a plusieurs règles qui permettent d'obtenir $\vdash \phi \vee \psi$, notamment les règles d'élimination.
   1.6 points. Taux de réussite : 51%
2. Pas prouvable. Voici un contre-modèle : la structure à 2 mondes $a \leq b$, $I(a) = \{Q\}$, $I(b) = \{P, Q\}$.
   $a \not\Vdash \neg P$ puisque $b \Vdash P$ et $b \geq a$ et $b \not\Vdash \neg P$. Donc $a \Vdash \neg P \to \neg Q$.
   $a \Vdash Q$ et $a \not\Vdash P$, donc $a \not\Vdash Q \to P$.
   Ainsi $a \Vdash \neg P \to \neg Q$ et $a \not\Vdash Q \to P$. Le jugement $\neg P \to \neg Q \vdash Q \to P$ n'est donc pas valide.

   1.6 points. Taux de réussite : 40%

3. prouvable : soit $\Gamma = \forall x.P(x) \vee Q(x),\ \exists x \neg P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists x.\neg P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg P(x) \vdash \forall x.P(x) \vee Q(x)}}{\Gamma, \neg P(x) \vdash P(x) \vee Q(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x)\neg P(x) \vdash \neg P(x)} \quad \dfrac{}{\Gamma, P(x), \neg P(x) \vdash P(x)}}{\Gamma, \neg P(x), P(x) \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma, \neg P(x), P(x) \vdash Q(x)} \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg P(x), Q(x) \vdash Q(x)}}{\Gamma, \neg P(x) \vdash Q(x)}\,\vee_e}{\Gamma, \neg P(x) \vdash \exists x.Q(x)}\,\exists_i}{\Gamma \vdash \exists x.Q(x)}\,\exists_e$$

Commentaires : Attention à l'utilisation de la règle $\exists_e$ qui demande que x n'apparait pas libre dans le reste du jugement. La moitié des copies fait une erreur dans l'utilisation de la règle. Un garde fou est de vérifier que les jugements intermédiaires sont valides...
2.3 points. Taux de réussite : 29%