Logique et Calculabilité 2011-2012. Examen

21 mai 2012. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstration.

Exercice 1

Donner, dans chacun des cas suivants un exemple de théorie du premier ordre T cohérente satisfaisant la propriété souhaitée. Justifier

1. T est récursive et complète
2. T est récursive et incomplète
3. T n'est pas récursivement énumérable et T est complète
4. T n'est pas récursivement énumérable et T est incomplète

Exercice 2

Dans cet exercice, ne pas utiliser les résultats du DM.
Soit $\mathcal{F} = \{S(1), 0(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$ et $\mathcal{T}$ est la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{array}{lllcl}
(A_1) & \forall x, y. & s(x) = s(y) & \rightarrow & x = y \\
(A_2) & \forall x. & x \neq 0 & \rightarrow & \exists y. x = s(y) \\
(A_3) & \forall x. & 0 \neq s(x) & & \\
(A_4^n) & \forall x. & x \neq s^n(x) & &
\end{array}$$

Soient deux modèles M_1 et M_2 de $\mathcal{T}$. On note $d_i(a, b)$ la fonction définie sur le domaine D_i de M_i par : $d_i(a, b) = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ a = s^n_{M_i}(b)\}$. Le minimum est $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers.

1. Montrer que, pour tout i, pour tous $a, b, c \in D_i$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_i(s^k(a), a) = k$ et que $d_i(a, b) + d_i(b, c) < +\infty$ entraine $d_i(a, b) + d_i(b, c) = d_i(a, c)$.
2. Montrer que, pour tous $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, si $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, il existe $b \in D_i$ tel que $a = s^k_{M_i}(b)$
3. On considère un jeu de Erhenfeucht-Fraïssé sur M_1, M_2 où les coups successifs de D et S sont donnés par les séquences $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ avec, pour tout i, $a_i \in D_1$ et $b_i \in D_2$. Montrer que, étant donné n, D a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant $\forall i \leq n, \forall j_1, j_2 \leq i$, si $(d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leq 2^{n-i})$ alors $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$.
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète

Succ	$\forall y.\forall x.x < s(y) \leftrightarrow x = y \vee x < y$
Zero	$\forall x.0 \not> x$
Pred	$\forall x, y.s(x) = s(y) \rightarrow x = y$
Proj	$\forall x_1, x_2, y_1, y_2.f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) \rightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$
Inf_1	$\exists x.0 < x \wedge \forall y.y < x \rightarrow s(y) < x$
Inf_2	$\forall x, \exists z.\forall y.y < z \leftrightarrow (y = x \vee (\exists y_1, y_2.y = f(s(y_1), s(y_2)) \wedge f(y_1, y_2) < z))$
Comp	$\forall x_0, \forall x.\exists z.\forall y.y < z \leftrightarrow$ $(y = x \vee (\exists y_1, y_2, z_1.y = f(y_1, s(y_2)) \wedge y_1 < x_0 \wedge z_1 < x_0 \wedge \phi(z_1, x, y_1) \wedge f(z_1, z_2) < z))$ Pour toute formule ϕ à trois variables libres

FIGURE 1 – Axiomes de la théorie $\mathcal{E}$

5. Les axiomes A_4^n sont ils tous nécessaires ? Peut-on remplacer cet ensemble d'axiomes par un sous-ensemble fini d'axiomes en conservant la complétude ? Justifier.

Problème

L'objectif est de montrer que toute extension d'une théorie “minimale” des ensembles est incohérente ou incomplète.

On considère $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), f(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{<(2), =(2)\}$ et les axiomes donnés dans la figure **??**, que l'on supposera, avec les axiomes de l'égalité, engendrer une théorie $\mathcal{E}$ cohérente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\overline{n} = s^n(0)$.

1. Soient

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \neq 0 \wedge \forall y.x \neq s(y)$$

$$SP(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y.y < z \leftrightarrow \exists y_1, y_2.y = f(y_1, y_2) \wedge \quad ((y_1 = x \wedge y_2 = 0) \vee (\exists z_1, z_2.y_1 = s(z_1) \wedge y_2 = s(z_2) \wedge f(z_1, z_2) < z))$$

$$Tr(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall w.SP(x, w) \rightarrow f(z, y) < w$$

   Montrer que :
   (a) $\mathcal{E} \models \forall x.0 \neq s(x)$
   (b) $\mathcal{E} \models \forall x.\exists z.SP(x, z)$.
   (c) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x, z.(Tr(x, \overline{n}, z) \leftrightarrow z = s^n(x))$
   (d) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x, y.Tr(x, y, \overline{n}) \rightarrow y = \overline{0} \vee \ldots \vee y = \overline{n}$
   (e) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E} \models \forall x.(\exists z.Tr(z, \overline{n}, x)) \vee (\exists z.Tr(z, x, \overline{n})) \vee (\exists w, \exists y.L(w) \wedge Tr(w, y, x))$$

   Indiquer dans chaque cas les axiomes de $\mathcal{E}$ utilisés.

2. Soit $\phi_+(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} Tr(x, y, z) \vee (\exists w.L(w) \wedge \exists y'.Tr(w, y', x) \wedge x = z)$ Montrer que :
   (a) pour tous entiers $k, m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ ssi $k = n + m$
   (b) pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x.\phi_+(\overline{m}, \overline{n}, x) \rightarrow x = \overline{m + n}$)
   (c) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x.(\exists z.\phi_+(z, x, \overline{n})) \rightarrow (x = \overline{0} \vee \ldots \vee x = \overline{n})$
   (d) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x.(\exists z.\phi_+(z, x, \overline{n})) \vee (\exists z.\phi_+(z, \overline{n}, x))$
3. Montrer que toute extension de $\mathcal{E}$ est ou bien incohérente ou bien incomplète.

Solution

Exercice 2

Note : garder à l'esprit deux modèles distincts de $\mathcal{T}$, par exemple, les entiers naturels d'une part et, d'autre part $\mathbb{N} \uplus \mathbb{Z}$, les entiers auxquels on a ajouté une copie des entiers relatifs.

1. Par définition (et les axiomes de l'égalité), $d_i(s^k_{M_i}(a), a) \leq k$. Par ailleurs, si $d_i(s^k_{M_i}(a), a) = k' < k$ alors $M_i, x \mapsto a \models s^{k-k'}(s^{k'}(x)) = s^{k'}(x)$ et donc $M_i \not\models A_4^{k-k'}$. Ce qui est absurde. Donc $d_i(s^k_{M_i}(a), a) = k$.
   Supposons qu'il existe des entiers n, m tels que $b = s^n_{M_i}(a)$ et $d_i(a, b) = n$ et $c = s^m_{M_i}(b)$ et $d_i(b, c) = m$. Alors $c = s^{n+m}_{M_i}(a)$. D'après la première partie de la question, on a alors $d_i(c, a) = n + m = d_i(a, b) + d_i(b, c)$.
2. Par récurrence sur k, on montre que $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$ implique qu'il existe un b tel que $a = s^k_{M_i}(b)$. Si $k = 0$, alors il suffit de choisir $b = a$. Sinon, $M_i, x \mapsto a \models x \neq 0$, donc par A_2, $M, x \mapsto a \models \exists y.x = s(y)$. Soit c tel que $a = s_{M_i}(c)$. $d_i(s_{M_i}(c), 0_{M_i}) = 1 + d_i(c, 0)$ si $d_i(c, 0) < +\infty$ d'après la première question. Dans tous les cas, $d_i(c, 0_{M_i}) \geq k - 1$. Par hypothèse re récurrence, il existe un b tel que $c = s^{k-1}_{M_i}(b)$ et donc $a = s^k_{M_i}(b)$.
3. Supposant que le spoiler a choisi N nombre de tours. Le duplicateur va choisir a_i (resp. b_i) tels que
   (a) $\forall j_1, j_2 \leq i$, ou bien $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$, ou bien $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) > 2^{N-i}$ et $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) > 2^{N-i}$
   (b) $\forall j \leq i$, ou bien $d_1(a_j, 0_{M_1}) = d_2(b_j, 0_{M_2})$ ou bien $d_1(a_j, 0_{M_1}) > 2^{N-i}$ et $d_2(b_j, 0_{M_2}) > 2^{N-i}$.

   Un tel choix est toujours possible, par récurrence sur i :
   - pour $i = 1$, si S choisit $a_1 = s^k_{M_1}(0)$, alors D choisit $b_1 = s^k_{M_2}(0_{M_2})$ (et inversement). Sinon, D choisit $b_1 = s^{2^{N+1}}_{M_2}(0_{M_2})$ (resp. $a_1 = s^{2^{N+1}}_{M_1}(0_{M_1})$). Par A_1 et A_3, $d_1(a_1, 0) = k = d_1(b_1, 0)$ dans le premier cas et $d_1(a_1, 0) > 2^N, d_2(b_1, 0) > 2^N$ dans le deuxième cas.
   - supposons que $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$ ont été choisis satisfaisant la propriété voulue. Supposons, sans perte de généralité, que S choisit a_{i+1} dans D_1. Le choix de D est déterminé par les trois cas suivants :
     (a) Si $a_{i+1} = s^k(a_j)$ pour $j \leq i$ et $k \leq 2^{N-i-1}$ ou si $a_{i+1} = s^k(0)$ avec $k \leq 2^{N-i-1}$, alors D choisit $b_{i+1} = s^k(b_j)$ (resp. $s^k(0)$).
     (b) Sinon, si $a_j = s^k(a_{i+1})$ avec $k \leq 2^{N-i-1}$, alors D choisit b_{i+1} tel que $b_j = s^k(b_{i+1})$. Ceci est possible d'après la deuxième question et puisque, par hypothèse de récurrence, $(d_1(a_j, 0) \geq 2^{N-i}$ et $d_2(b_j, 0) \geq 2^{N-i} \geq k$)ou $d_1(a_j, 0) = d_2(b_j, 0) \geq k$
     (c) Sinon, soit $k = \max\{j \mid j = 0 \vee \exists j_1 \leq i.a_{j_1} = s^j(0)\}$. D choisit $b_{i+1} = s^N(b_k)$.

     Montrons que ces choix de D satisfont bien les propriétés voulues.
     - Si $j_1 \leq i$ est tel que $d_1(a_{i+1}, a_{j_1}) = k_1 \leq 2^{N-i-1}$, alors $a_{i+1} = s^{k_1}(a_{j_1}) = s^k(a_j)$ et donc (par récurrence en utilisant A_1), $a_{j_1} = s^{k-k_1}(a_j)$ ou $a_j = s^{k_1-k}(a_{j_1})$. Comme $|k_1 - k| \leq 2^{N-i}$, $b_{j_1} = s^{k-k_1}(b_j)$ (resp. $b_j = s^{k_1-k}(b_{j_1})$) par hypothèse sur les séquences $a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_i$. Donc $b_{i+1} = s^k(b_j) = s^{k_1}(b_{j_1})$.
     - Si $j_1 \leq i$ est tel que $d_1(a_{j_1}, a_{i+1}) = k_1 \leq 2^{N-i-1}$, on raisonne de même : $d_1(a_{j_1}, a_j) = d(a_{j_1}, a_{i+1}) + d_1(a_{i+1}, a_j)$ (première question) et, comme $d(a_{j_1}, a_{i+1}) \leq 2^{N-i-1}$ et

$d(a_{i+1}, a_j) \leq 2^{N-i-1}$, $d_1(a_{j_1}, a_j) \leq 2^{N-i}$ et donc $d_2(b_{j_1}, b_j) = d_1(a_{j_1}, a_j)$. Il en résulte que $d_2(b_{j_1}, b_{j+1}) = k_1$.
- Réciproquement, si $d_2(b_{j_1}, b_{j+1}) = k_1 \leq 2^{N-i-1}$, par un raisonnement analogue, $d_1(a_{j_1}, a_{j+1}) = k_1$ et , si $d_2(b_{j+1}, b_{j_1}) = k_1 \leq 2^{N-i-1}$, alors $d_1(a_{j+1}, a_{j_1}) = k_1$.
- Si $d_1(a_{i+1}, 0) \leq 2^{N-i-1}$, alors, par construction $d_2(b_{i+1}, 0) = d_1(a_{i+1}, 0)$ et réciproquement.

4. La stratégie du duplicateur de la question précédente est une stratégie gagnante : les séquences $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ sont des isomorphismes partiels puisque $a_i = 0$ ssi $b_i = 0$ et $a_i = s(a_j)$ ssi $b_i = s(b_j)$. Il en résulte que deux modèles quelconques de $\mathcal{T}$ sont élémentairement équivalents.

   Si $\mathcal{T}$ n'était pas complète, il existerait une formule close ϕ telle que $\mathcal{T} \not\models \phi$ et $\mathcal{T} \not\models \neg\phi$. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \cup \{\phi\}$ et $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \cup \{\neg\phi\}$ engendrent alors des théories cohérentes. Si M_1 est un modèle de $\mathcal{T}_1$ et $M_2 \models \mathcal{T}_2$, M_1 et M_2 sont des modèles de $\mathcal{T}$ et ne sont pas élémentairement équivalents. Contradiction. Donc $\mathcal{T}$ est complète.

5. Les axiomes A_4^n ne sont pas tous nééssaires. Par exemple $\forall x.x \neq s(x)$ est une conséquence de $\forall x.x \neq s^2(x)$. Par contre, une infinité de tels axiomes est nécéssaire. Sinon, soit un n strictement supérieur à tous les indices des axiomes : on peut construire un modèle de $\{A_4^i \mid i < n\} \cup \{\exists x.x = s^n(x)\}$: on considère $\mathbb{N} \uplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dans lequel 0 est interprété par $0_{\mathbb{N}}$. Le successeur est interprété comme l'ajout de 1, dans les deux composantes de la structure.

Problème

1. (a) $\mathsf{Succ} \models \forall x.x < s(x) \leftrightarrow x = x \vee x < x$. Par les axiomes de l'égalité on a donc $\mathcal{E} \models \forall x.x < s(x)$.

   Donc $\mathcal{E} \models \forall x.0 = s(x) \to x < 0$. Par Zero on a donc $\mathcal{E} \models \forall x.0 \neq s(x)$.

   (b) $\mathsf{Inf}_2 \models \forall x.\exists z.\forall y.y < z \leftrightarrow (y = f(x, 0) \vee (\exists z_1, z_2.y = f(s(z_1), s(z_2)) \wedge f(z_1, z_2) < z))$ (en remplaçant x par $f(x, 0)$ dans l'axiome et en renommant les variables).

   Par ailleurs (axiomes de l'égalité)

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \models \forall x.\forall y, \forall z_1, z_2. \quad & (y = f(x, 0) \vee y = f(s(z_1), s(z_2)) \\ & \leftrightarrow \exists y_1, y_2.y = f(y_1, y_2) \wedge ((y_1 = x \wedge y_2 = 0) \vee (y_1 = s(z_1) \wedge y_2 = s(z_2))\end{aligned}$$

   D'où (par complétude sémantique),

$$\mathcal{E} \models \forall x.\exists z.y < z \leftrightarrow \exists y_1, y_2.(y_1 = x \wedge y_2 = 0) \vee (\exists z_1, z_2.y_1 = s(z_1) \wedge y_2 = s(z_2) \wedge f(z_1, z_2) < z)$$

   (c) On montre le résultat par récurrence sur n.

   Si $n = 0$,
   $\mathcal{E} \models \forall x, z.Tr(x, \overline{0}, z) \leftrightarrow x = z$ ssi
   $\mathcal{E} \models \forall x, z.(\forall w.SP(x, w) \to f(z, \overline{0}) < w) \leftrightarrow x = z$.
   Notons que $\models \forall x, w.SP(x, w) \to f(x, 0) < w$. Réciproquement,

$$\models \forall x, w.SP(x, w) \to (f(z, 0) < w \to (x = z \vee \exists y.0 = s(y))$$

   et donc, d'après la première question,

$$\mathcal{E} \models \forall x, w.SP(x, w) \to (f(z, 0) < w \to x = z).$$

Mais, d'après (b),

$$\mathcal{E} \models \forall x.\exists w_0.SP(x, w_0)$$

donc

$$\mathcal{E} \models \forall x, \forall z.\exists w_0.SP(x, w_0) \wedge (f(z, 0) < w_0 \rightarrow x = z)$$

Donc $\mathcal{E} \models \forall x, z.(\forall w.SP(x, w) \rightarrow f(z, \overline{0}) < w) \rightarrow x = z$.

Si $n > 0$, montrons d'abord que $\mathcal{E} \models \forall x, z.Tr(x, \overline{n}, z) \rightarrow \exists z'.z = s(z')$.
Comme précédemment, il suffit de montrer

$$\mathcal{E} \models \forall x, z.\exists w_0.SP(x, w_0) \wedge (f(z, \overline{n}) < w_0 \rightarrow \exists z'.z = s(z'))$$

Ceci est une conséquence de la définition de SP et de $\overline{n} \neq 0$ (question a).
Montrons maintenant $\mathcal{E} \models \forall x, z.Tr(x, \overline{n}, s(z)) \leftrightarrow Tr(x, \overline{n-1}, z)$. Il suffit de montrer

$$\mathcal{E} \models \forall x, z.\forall w.(SP(x, w) \rightarrow (f(s(z), \overline{n}) < w \leftrightarrow f(z, \overline{n-1}) < w))$$

ce qui est une conséquence de la définition de SP et de $\overline{n} \neq \overline{0}$.
Par hypothèse de récurrence on obtient ainsi $\mathcal{E} \models \forall x, z.Tr(x, \overline{n}, z) \rightarrow z = s^n(x)$.
Réciproquement, montrons $\mathcal{E} \models \forall x, z.Tr(x, \overline{n}, s^n(x))$. Ceci est une conséquence de

$$\models \forall x, w.(SP(x, w) \rightarrow (f(s^n(x), \overline{n}) < w \leftrightarrow f(s^{n-1}(x), \overline{n-1}) < w$$

et de l'hypothèse de récurrence.

(d) On raisonne à nouveau par récurrence sur n. Si $n = 0$, $\mathcal{E} \models \forall w \forall x, \forall y.(SP(x, w) \rightarrow (f(\overline{0}, y) < w \leftrightarrow (x = \overline{0} \wedge y = \overline{0})$. Sinon,

$$\mathcal{E} \models \forall w, \forall x, \forall y.(SP(x, w) \rightarrow (f(\overline{n}, y) < w \leftrightarrow ((\exists y'.y = s(y') \wedge f(\overline{n-1}, y') < w) \vee (y = \overline{0} \wedge x = \overline{n}))))$$

Donc

$$\mathcal{E} \models \forall x, y.(Tr(x, y, \overline{n}) \rightarrow ((x = \overline{n} \wedge y = \overline{0}) \vee \exists y'.y = s(y') \wedge Tr(x, y', \overline{n-1})))$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

(e) On montre d'abord, par récurrence sur n, que

$$\models \forall z.(\exists z'.z = s^n(z')) \vee (\exists w.(L(w) \vee w = 0) \wedge (z = w \vee z = s(w) \vee \ldots \vee z = s^{n-1}(w)))$$

Il suffit ensuite d'utiliser les questions (c) et (d).

2. (a) D'après 1c, $\mathcal{E} \models Tr(\overline{n}, \overline{m}, \overline{n+m})$ et donc $\mathcal{E} \models \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{n+m})$. Réciproquement, si $\mathcal{E} \models \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$, alors montrons que $\mathcal{E} \not\models \exists w.L(w) \wedge \exists y'.Tr(w, y', \overline{n}) \wedge \overline{n} = \overline{k})$.
D'après 1d, $\mathcal{E} \models \forall w, y'.(Tr(w, y', \overline{n}) \rightarrow (y' = \overline{0} \vee \ldots \vee y' = \overline{n}))$. Et d'après 1c, $\mathcal{E} \models \forall w.(Tr(w, \overline{m}, \overline{n}) \rightarrow \overline{n} = s^m(w))$. Il en résulte que

$$\mathcal{E} \models \forall w, y'.(Tr(w, y', \overline{n}) \rightarrow (w = \overline{0} \vee \ldots \vee w = \overline{n}).$$

Or, pour tout m, $\mathcal{E} \models \neg L(\overline{m})$.
Par conséquent, si $\mathcal{E} \models \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$, alors $\mathcal{E} \models Tr(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ et, d'après 1c. $k = n+m$.

(b) Comme vu dans la question précédente, pour tout entier m,

$$\mathcal{E} \models \forall w, y. Tr(w, y, \overline{m}) \rightarrow \neg L(w).$$

Donc, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \phi_+(\overline{m}, \overline{n}, x) \rightarrow Tr(\overline{m}, \overline{n}, x)$. Il suffit alors de conclure à l'aide de la question 1c.

(c) C'est une conséquence de 1d et de la preuve de 2a.

(d) d'après 1e, $\mathcal{E} \models \forall x. \exists z. \phi_+(z, \overline{n}, x) \vee \phi_+(z, x\overline{n}) \vee (\exists w. \exists y. L(w) \wedge Tr(w, y, x))$. Mais, par définition, $\models \forall x. (\exists w. \exists y. L(w) \wedge Tr(w, y, x)) \rightarrow \exists z. \phi_+(z, \overline{n}, x)$. D'où le résultat.

3. On commence par définir

$$SM(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y_1, y_2. f(y_1, y_2) < z \leftrightarrow (\exists z_1, z_2. y_2 = s(z_2) \wedge \phi(z_1, x, y_1) \wedge f(z_1, z_2) < z) \vee (y_1 = 0 \wedge y_2 = 0)$$

Avec $\phi(x, y, z) = Tr(x, y, z) \wedge E(z) \wedge E(x)$ où $E(z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x. (0 < x \wedge (\forall y. y < x \rightarrow s(y) < x)) \rightarrow z < x$,

$$\phi_\times(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall w. SM(x, w) \rightarrow f(z, y) < w$$

Montrons que $\mathcal{E} \models \forall x. \exists z. SM(x, z)$. Notons d'abord que, par Inf_1, $\exists x. \forall z. E(z) \rightarrow z < x$. On utilise alors Comp (détails omis).

Par récurrence sur n, $\mathcal{E} \models E(\overline{n})$.

Par récurrence sur m, $\mathcal{E} \models \forall z. \phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, z) \rightarrow z = \overline{n \times m}$:

si $m = 0$, $\phi_\times(\overline{n}, 0, z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall w. SM(\overline{n}, w) \rightarrow f(z, 0) < w$. Mais $\mathcal{E} \models \forall x, z. SM(x, z) \rightarrow \forall y_1. f(y_1, 0) < z \leftrightarrow y_1 = 0$ (par 1a). D'où le résultat.

Pour la récurrence, si $\mathcal{E}, z \mapsto \alpha \models \phi_\times(\overline{n}, \overline{m+1}, z)$, alors $\mathcal{E}, z \mapsto \alpha \models \forall w. SM(\overline{n}, w) \rightarrow \exists z_1. \phi(z_1, \overline{n}, z) \wedge f(z_1, \overline{m}) < w$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{E} \models \forall z_1. (\forall w. SM(\overline{n}, w) \rightarrow f(z_1, \overline{m}) < w) \rightarrow z_1 = \overline{n \times m}$.

Donc $\mathcal{E}, z \mapsto \alpha \models \forall w. SM(\overline{n}, w) \rightarrow \phi(\overline{n \times m}, \overline{n}, z) \wedge f(\overline{n \times m}, \overline{m}) < w$. Mais $\mathcal{E} \models \forall z. Tr(\overline{n \times m}, \overline{n}, z) \rightarrow z = \overline{n \times (m+1)}$ d'après 1c. Donc $\mathcal{E}, z \mapsto \alpha \models \forall w. SM(\overline{n}, w) \rightarrow z = \overline{n \times (m+1)}$.

Par ailleurs, on montre, par récurrence sur m, que $\mathcal{E} \models \phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{n \times m})$. (détails omis).

Comme $\mathcal{E}$ satisfait les propriétés A_+... (questions 2a, 2b, 2c, 2d et ce que nous venons de montrer), d'après le théorème du cours, toute extension de $\mathcal{E}$ est incohérente ou incomplète.