Devoir de Calculabilité

À remettre au plus tard le 19 décembre 2012

Dans tout le problème, nous appelerons *fonction affine* une application $f_{M,V}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donnée par une matrice $n \times n$ M à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et un vecteur $V \in \mathbb{Q}^n$.

$$f_{M,V}(X) \quad = \quad MX + V$$

Étant donné un ensemble S d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, une *trajectoire (finie, resp. infinie)* d'un point $A \in \mathbb{R}^n$ sous l'action de S est une suite (finie, resp. infinie) $A_i, i \in I$ (où $I = \{0, ...m\}$, resp. $I = \mathbb{N}$) telle que $A_0 = A$ et, pour tout i, si $i+1 \in I$, il existe $f \in S$ telle que $f(A_i) = A_{i+1}$. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Une trajectoire de A sous l'action de S *passe par* E s'il existe une trajectoire (finie) de A,$A_1 \cdots A_m$, telle que $A_m \in E$.

Question 1

Dans cette question on s'intéresse au problème de savoir si on peut contrôler un système pour atteindre un but donné (par exemple: étant données des actions élémentaires d'un robot, peut-on le programmer de manière à trouver une trajectoire allant d'un point à un autre).

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: Un ensemble fini S de fonctions affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et deux vecteurs $A, B \in \mathbb{Q}^2$

Question: Existe-t-il une trajectoire de A qui passe par B ?

Indication: On pourra utiliser le problème de correspondance de Post modifié.

Question 2

Est-on sûr d'éviter les pièges ?

Une *région rectangulaire* de $\mathbb{R}^n$ est un produit d'intervalles (ouverts ou fermés) de $\mathbb{R}$ à bornes rationnelles ou infinies. Une telle région est *ouverte* (resp. *fermée*) si elle est un produit d'intervalles ouverts (resp. fermés).

1. Montrer que le problème suivant est indécidable:

   Donnée: un ensemble fini de fonctions affines S, une région rectangulaire $R \subseteq \mathbb{R}^2$ et un point $A \in \mathbb{Q}^2$

   Question: est ce que toutes les trajectoires de A évitent R ?

2. Montrer que le problème reste indécidable si R est une région rectangulaire ouverte

Question 3

Peut-on éviter les pièges ?

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: un ensemble fini de fonctions affines S, un point A et un ensemble fini de régions rectangulaires ouvertes $\mathcal{R}$

Question: existe-t-il une trajectoire infinie de A qui évite toutes les régions de $\mathcal{R}$?

Indication: On pourra réduire le complémentaire de l'arrêt des machines de Turing. Par exemple, en dimension 4, les deux premières composantes peuvent être utilisées pour coder les configurations de la machine et les deux dernières peuvent être utilisées d'une part pour garder trace des déviations par rapport aux calculs valides et d'autre part pour modéliser deux phases (application d'une transition et vérification de l'absence de déviation).

Question 4

Et s'il n'y a qu'une seule transformation applicable en chaque point ?

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est *affine par morceaux* s'il existe une partition de $\mathbb{R}^n$ en un nombre fini de régions rectangulaires $R_1, \ldots, R_m$, telle que la restriction de f à chacune des régions R_i est une fonction affine.

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: une fonction affine par morceaux f et un point A

Question: existe-t-il une trajectoire de A sous la seule action de f, qui passe par l'origine ?

(Remarque: on ne demande pas que f soit continue)
Indication: On pourra utiliser un codage des machines de Turing comme suit. Une configuration $\gamma = (q, a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_m)$ d'une machine de Turing est codée par les deux nombres rationnels $(n_\gamma, p_\gamma) \in [0,1]^2$:

- $n_\gamma = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{h^{i+1}}$
- $p_\gamma = \displaystyle\frac{q}{h} + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{h^{i+1}}$

Où h est un entier bien choisi, $h > |\Sigma| + |Q|$.

Question 5

Est ce qu'on peut faire un reset ?

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble fini de matrices, on note $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ le plus petit ensemble de matrices contenant $\mathcal{E}$ et tel que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est dans $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.

Montrer que le problème suivant est indécidable:

Donnée: un ensemble fini $\mathcal{E}$ de matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Question: est ce que la matrice nulle appartient à $\mathcal{S}(\mathcal{E})$?

Indication: On pourra successivement montrer (en codant PCP) que les problèmes suivants sont indécidables:

1. **Donnée:** un ensemble fini $\mathcal{E}$ de matrices 3×3 à coefficients entiers

   Question: Est ce que $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$?

2. **Donnée:** un ensemble fini $\mathcal{E}$ de matrices 3×3 à coefficients entiers

   Question: Est ce que $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ contient une matrice dont le coin supérieur gauche est 0 ?