Devoir Maison, cours de logique, L3, 2019.

L'objet du problème est de montrer l'equi-expressivité de la logique monadique du premier ordre sur un ordre discret et de diverses versions de la logique du temps linéaire.

Partie 1 : logique monadique d'un ordre discret

Notre logique $\mathcal{L}$ est la logique du premier ordre, dans laquelle l'ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P} = \{= (2), < (2)\} \cup \mathcal{P}_1$, où $\mathcal{P}_1$ est un ensemble de symboles de prédicats d'arité 1, et l'ensemble de symboles de fonction $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$. On écrira indifféremment $u > v$ ou $v < u$.

$\mathcal{A}$ est l'ensemble d'axiomes composé des axiomes de l'égalité et des formules suivantes :

$$\begin{array}{lc}
(T) & \forall x, y, z.\ x < y \wedge y < z \to x < z \\
(I) & \forall x.\ \neg x < x \\
(M) & \forall x.\ x = 0 \vee 0 < x \\
(S) & \forall x.\ x < s(x) \\
(D) & \forall x, y.\ x < y \to y = s(x) \vee s(x) < y \\
(L) & \forall x, y.\ x < y \vee x = y \vee y < x \\
(P) & \forall x.\ x = 0 \vee \exists y.\ x = s(y)
\end{array}$$

1. Montrer que les formules suivantes sont des conséquences logiques de $\mathcal{A}$:
   (a) $\forall x.\neg(s(x) = 0)$
   (b) $\forall x, y.\ s(x) = s(y) \to x = y$
2. Montrer que (L) n'est pas une conséquence logique des autres axiomes de $\mathcal{A}$.

   Dans la suite, on ne considérera que des structures dont l'algèbre sous-jacente est l'ensemble des entiers naturels, muni de ses opérations habituelles, avec l'interprétation usuelle des symboles $=$ et $>$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces structures. On dira, par abus de langage, que deux formules $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ sont *équivalentes* si elles ont même ensemble de variables libres et si, pour toute affectation σ (dans $\mathbb{N}$) de ces variables libres et pour tout $M \in \mathcal{M}$,

   $M, \sigma \models \phi$ ssi $M, \sigma \models \psi$
3. On note $\mathbb{B}(z)$ l'ensemble des formules qui sont des combinaisons Booléennes de formules atomiques $P(t)$, avec $P \in \mathcal{P}_1$ et $Var(t) = \{z\}$.

   Une formule *simple* est une disjonction de formules ϕ qui peuvent s'écrire :

$$\begin{array}{rcl}
\phi & \stackrel{def}{=} & \bigwedge_{i=1}^{m} z_i = x_{k_i} \wedge \exists \overline{x}.\ \bigwedge_{i=0}^{n} x_i > x_{i+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n+1} \theta_i(x_i) \\
 & & \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \forall y.((x_i > y \wedge y > x_{i+1}) \to \alpha_i(y)) \\
 & & \wedge \forall y.(y > x_0 \to \alpha(y)) \wedge \forall y.(x_{n+1} > y \to \beta(y))
\end{array}$$

   où $\alpha_i(y), \alpha(y), \beta(y) \in \mathbb{B}(y), \theta_i(x) \in \mathbb{B}(x)$ et $\overline{x} \subseteq \{x_0, \ldots, x_{n+1}\} \setminus \{x_{k_0}, \ldots, x_{k_m}\}$

   (a) Montrer que la conjonction et la disjonction de deux formules simples sont équivalentes à des formules simples.

(b) Montrer que, si ϕ est une formule simple, alors $\exists x.\phi$ est équivalente à une formule simple.

(c) Montrer que $\neg(\exists x_1, \ldots, x_n.\ \bigwedge_{i=0}^{n} x_i > x_{i+1} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \theta_i(x_i))$ est équivalente à une formule simple.

(d) Montrer que

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_n \bigwedge_{i=0}^{n} x_i > x_{i+1} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \theta_i(x_i) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \forall y.(x_i > y \wedge y > x_{i+1} \to \alpha_i(y))$$

est équivalente à une formule simple (Ind : on pourra raisonner par récurrence sur n)

(e) Montrer que la négation d'une formule simple est équivalente à une formule simple

4. Montrer que toute formule de $\mathcal{L}$ est équivalente à une formule simple.

Partie 2 : Logique du temps linéaire avec modalités du passé

Étant donné un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}_0$, l'ensemble Φ des formules de LTL est le plus petit ensemble tel que

— $\{\bot, \top\} \cup \mathcal{P}_0 \subseteq \Phi$

— Si $\phi, \psi \in \Phi$, alors $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \to \psi \in \Phi$

— Si $\phi \in \Phi$, alors $\bigcirc\phi \in \Phi$

— si $\phi, \psi \in \Phi$, alors $\phi \,\mathcal{U}\, \psi \in \Phi$ et $\phi \,\mathcal{S}\, \psi \in \Phi$

$\phi \,\mathcal{U}\, \psi$ se lit "ϕ until ψ" et $\phi \,\mathcal{S}\, \psi$ se lit "ϕ since ψ".

Une interprétation est ici une application de $\mathbb{N}$ dans $2^{\mathcal{P}_0}$ (qui donne les variables propositionnelles satisfaites à chaque instant).

La relation de satisfaction relie une interprétation, une date $t \in \mathbb{N}$ et une formule. Elle est définie par :

— $I, t \models \top$, $I, t \not\models \bot$, $I, t \models P$ ssi $P \in I(t)$

— $I, t \models \neg\phi$ ssi $I, t \not\models \phi$, $I, t \models \phi \wedge \psi$ ssi $I, t \models \phi$ et $I, t \models \psi$, $I, t \models \phi \vee \psi$ ssi $I, t \models \phi$ ou $I, t \models \psi$, $I, t \models \phi \to \psi$ si $I, t \not\models \phi$ ou $I, t \models \psi$.

— $I, t \models \bigcirc\phi$ ssi $I, t+1 \models \phi$

— $I, t \models \phi \,\mathcal{U}\, \psi$ ssi $\exists t' \geq t$, $I, t' \models \psi$ et $\forall t < t'' < t'. I, t'' \models \phi$

— $I, t \models \phi \,\mathcal{S}\, \psi$ ssi $\exists t' \leq t$, $I, t' \models \psi$ et $\forall t' < t'' < t. I, t'' \models \phi$

Une formule $\phi \in \Phi$ est *satisfaite* par I si $I, 0 \models \phi$. (On dit aussi que I est un modèle de ϕ)

1. Donner une formule de LTL dont le seul modèle est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\{P, Q\}$ telle que $I(2k) = P$ et $I(2k+1) = Q$ pour tout entier k.
2. À une interprétation I de LTL on associe la structure du premier ordre $\overline{I}$ dont le domaine est $\mathbb{N}$, muni de l'ordre strict et du successeur habituels. Chaque symbole de prédicat P étant interprété par $P_{\overline{I}} = \{n \in \mathbb{N} \mid P \in I(n)\}$.

   Montrer qu'à toute formule $\phi \in \Phi$ on peut associer une formule $\overline{\phi} \in \mathcal{L}$ telle que $I, 0 \models \phi$ ssi $\overline{I} \models \overline{\phi}$.

   Autrement dit : la logique $\mathcal{L}$ est au moins aussi expressive que LTL .

Partie 3 : Logique du temps linéaire sans modalités du passé

On note FLTL le fragement de LTL sans le $\mathcal{S}$ (donc n'utilisant que $\mathcal{U}$ et les connecteurs logiques). Traduction de L dans LTL.

Étant donnée une structure I qui satisfait $\mathcal{A}$, on note $\widetilde{I}$ l'interprétation définie par $\widetilde{I}(n) = \{P \in \mathcal{P}_1 \mid I, x \mapsto s^n(0) \models P(x)\}$.

1. Montrer qu'on peut associer à toute formule $\phi \in \mathcal{L}$ sans variable libre une formule $\widetilde{\phi}$ de FLTL telle que pour toute structure I qui satisfait $\mathcal{A}$,

$$I \models \phi \quad \text{ssi} \quad \widetilde{I}, 0 \models \widetilde{\phi}$$

   Autrement dit, FLTL est au moins aussi expressive que $\mathcal{L}$.

2. Montrer que $\widetilde{\widetilde{\phi}}$ et ϕ sont logiquement équivalente. Que peut on en conclure ?