

## Chapitre 2

# Calcul propositionnel

C'est le formalisme logique le plus simple. Mais il est fondamental pour plusieurs raisons :

- Bien sûr, il sert d'introduction pédagogique.
- Plusieurs résultats en calcul des prédicats, en logique temporelle etc... s'obtiennent par "relèvement" de résultats du calcul propositionnel.
- En fait, en pratique, il est très utilisé à cause de sa simplicité et de l'algorithmique relativement efficace qu'on peut mettre en oeuvre.

Il y a aussi plusieurs formalismes pour le calcul propositionnel. On commencera par le plus standard "à la Hilbert", puis on s'intéressera au calcul des séquents, à la déduction naturelle (dans les deux cas, dans le cas classique et dans le cas intuitioniste), ainsi qu'à d'autres représentations comme les anneaux Booléens.

### 2.1 Syntaxe

La définition d'une logique passe par trois étapes : la définition des énoncés (syntaxe), la définition des modèles (sémantique) et enfin, la théorie de la preuve.

On suppose ici donné un ensemble de *variables propositionnelles*  $\mathcal{P}$ .

**Definition 2.1.1** *L'ensemble  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$  des formules du calcul propositionnel est le plus petit ensemble tel que :*

- les constantes  $\top, \perp$  sont dans  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$
- Si  $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$  alors  $\neg\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$
- Si  $\phi, \psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ , alors  $\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \phi \rightarrow \psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$

Dans cette définition,  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$  sont les *connecteurs logiques*.

On définit aussi les *formules de taille  $n$*  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :

- Si  $\phi \in \mathcal{P} \cup \{\perp, \top\}$ , alors  $\phi$  est une formule de taille 1
- Si  $\phi$  est une formule de taille  $n$  et  $\psi$  est une formule de taille  $m$ , alors  $\neg\phi$  est une formule de taille  $n + 1$  et  $\phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi$  sont des formules de taille  $n + m + 1$ .

Soit  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})_n$  l'ensemble des formules de taille  $n$  ainsi défini.

**Proposition 2.1.1**  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_0(\mathcal{P})_n$ .

**Exercice 2 (3)**

Prouver la proposition précédente.

Cette proposition permet des définitions par récurrence sur la taille de la formule.

**Exemple 2.1.1** Soit

$\mathcal{P} = \{\text{La\_bo\^i}t\text{e\_1\_contient\_une\_bombe}, \dots, \text{La\_bo\^i}t\text{e\_n\_contient\_une\_bombe}\}$

un ensemble de  $n$  variables propositionnelles. Voici des exemples de formules de  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$  :

$\text{La\_bo\^i}t\text{e\_1\_contient\_une\_bombe} \wedge \text{La\_bo\^i}t\text{e\_2\_contient\_une\_bombe}$   
 $\text{La\_bo\^i}t\text{e\_1\_contient\_une\_bombe} \wedge \neg \text{La\_bo\^i}t\text{e\_1\_contient\_une\_bombe}$

**Exemple 2.1.2** Soit  $\mathcal{P} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Sont des formules de  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$  :

$$A_2 \wedge A_2 \wedge (A_2 \vee \neg A_2)$$

$$A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2)$$

N'est pas une formule :

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \vee \dots \quad (\text{disjonction infinie})$$

Remarques :

1. Le parenthésage doit permettre de désambigüer. Habituellement la négation a priorité sur les autres connecteurs.
2. Le cas des disjonctions infinies sera (entre autres) étudié ultérieurement ; il s'agit d'une logique plus expressive que  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ .

## 2.2 Sémantique

Une *interprétation* est une application  $I$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\{0, 1\}$ .

**Definition 2.2.1** Une interprétation  $I$  satisfait une formule  $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ , ce que l'on note  $I \models \phi$  ( $\models \subseteq 2^{\mathcal{P}} \times \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ ), si

- $\phi = \top$  ou bien
- $\phi \in \mathcal{P}$  et  $I(\phi) = 1$  ou bien
- $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$  et ( $I \models \phi_1$  et  $I \models \phi_2$ ) ou bien
- $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$  et ( $I \models \phi_1$  ou  $I \models \phi_2$ ) ou bien
- $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$  et (si  $I \models \phi_1$  alors  $I \models \phi_2$ ) ou bien
- $\phi = \neg \psi$  et  $I \not\models \psi$

**Definition 2.2.2** Une interprétation  $I$  satisfait un ensemble de formules  $S$  (noté  $I \models S$ ) si  $I$  satisfait chacune des formules de  $S$ .

Un modèle d'un ensemble  $S$  de formules est une interprétation  $I$  telle que  $I \models S$ .

Une formule  $\phi$  (resp. un ensemble de formules  $S'$ ) est une conséquence logique de  $\psi$  (resp. d'un ensemble de formules  $S$ ) si tout modèle de  $\psi$  (resp. tout modèle de  $S$ ) est un modèle de  $\phi$  (resp. est un modèle de l'une des formules de  $S'$ ). On note alors  $\psi \models \phi$  (resp.  $S \models S'$ ).

Une formule est satisfaisable si elle a au moins un modèle.

Une formule  $\phi$  est valide si toute interprétation est un modèle de  $\phi$ .

On dit que deux formules sont logiquement équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes modèles.

**Exercice 3 (1)**

Donner l'ensemble de tous les modèles de la formule  $\phi \stackrel{\text{def}}{=} ((P \rightarrow Q) \vee (\neg P \rightarrow \neg Q)) \wedge (Q \wedge R \rightarrow \neg P)$  lorsque  $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$ .

**Exercice 4 (1)**

Montrer que :

1.  $\phi$  est insatisfaisable si et seulement si  $\neg\phi$  est valide
2.  $\phi \models \psi$  si et seulement si  $\phi \rightarrow \psi$  est valide.

**Exercice 5 (4)**

Montrer que, si  $\mathcal{P}$  est fini, alors dans tout ensemble de formules fini de cardinal assez grand (on précisera cette borne), il existe deux formules logiquement équivalentes (i.e. qui ont même ensembles de modèles).

**Exercice 6 (5)**

1. Montrer que, lorsque  $\mathcal{P}$  est fini, pour tout ensemble d'interprétations  $S$ , il existe un ensemble de formules  $E$  tel que  $S$  est exactement l'ensemble des modèles de  $E$ .
2. Montrer que ce résultat est faux lorsque  $\mathcal{P}$  est infini.

**Exercice 7 (6)**

Donner un exemple d'un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini et dénombrable.

**Exercice 8 (5)**

**(théorème d'interpolation)** Soient  $\phi, \psi$  telles que  $\phi \models \psi$ . Montrer que il existe une formule  $\theta$  telle que  $\phi \models \theta$ ,  $\theta \models \psi$  et les variables propositionnelles apparaissant dans  $\theta$ , apparaissent aussi dans  $\phi$  et dans  $\psi$ .

**Exercice 9 (6)**

**(théorème de compacité)**  $\{0, 1\}$  est muni de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert.  $\{0, 1\}$  muni de cette topologie est ainsi un compact. L'ensemble  $\{0, 1\}^A$  des interprétations des formules propositionnelles construites sur  $A$  est alors muni de la topologie produit : les ouverts sont les unions (arbitraires) de produits  $\prod_{a \in A} \mathcal{O}_a$  où l'ensemble des  $a \in A$  tels que  $\mathcal{O}_a \neq \{0, 1\}$  est fini.

Tout produit de compacts étant compact (ce qui est admis), l'espace  $\mathcal{I}$  de toutes les interprétations est ainsi un compact.

1. Montrer que, pour toute formule  $\phi$ , l'ensemble des interprétations qui satisfont  $\phi$  est un fermé de  $\mathcal{I}$ .
2. En déduire que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable.

Les connecteurs logiques ne sont pas tous indépendants. Par exemple, pour toutes formules  $\phi$  et  $\psi$ ,  $\phi \rightarrow \psi$  est logiquement équivalent à  $\neg\phi \vee \psi$ .

**Exercice 10 (1)**

Le démontrer.

Ainsi,  $\rightarrow$  est *définissable* à l'aide de  $\vee, \wedge, \neg$ .

**Exercice 11 (2)**

Montrer que  $\vee, \wedge, \neg$  sont définissables à l'aide du seul connecteur  $\rightarrow$  et de la constante  $\perp$ . On dit alors que l'ensemble  $\{\rightarrow, \perp\}$  est *fonctionnellement complet*.

On peut aussi définir de nouveaux connecteurs logiques, par exemple

$$\phi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

ou

$$\phi \oplus \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$$

**Exercice 12 (3)**

Plus généralement, les connecteurs logiques peuvent être vus comme des fonctions Booléennes. Si  $F$  est un ensemble de fonctions Booléennes, on note  $A(F)$  l'ensemble de toutes les fonctions Booléennes obtenues à l'aide des fonctions de  $F$  et de la composition et des projections (fonctions  $\pi_n^i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$ ).

Pour tout entier  $n \geq 1$  on note  $d_n$  (resp.  $c_n$ ) la fonction Booléenne à  $n$  arguments qui renvoie 0 (resp. 1) si et seulement si tous ses arguments valent 0 (resp. 1).

1. Montrer que, pour tous  $n, m, k \geq 2$ ,  $A(c_n, f_{\neg}) = A(d_m, f_{\neg})$  contient toutes les fonctions Booléennes à  $k$  arguments.
2. Montrer que  $f_{\neg}$  n'est pas dans  $A(f_{\vee}, f_{\wedge}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow})$

**Exercice 13 (4)**

Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

**Exercice 14 (5)**

Montrer que  $\{\leftrightarrow, \neg\}$  n'est pas fonctionnellement complet.

**Exercice 15 (6)**

Un ensemble de formules  $E$  est *indépendant* si, pour toute formule  $\phi \in E$ ,  $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$ .

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules  $E$ , il existe un sous-ensemble fini  $E' \subseteq E$  indépendant tel que, pour tout  $\phi \in E$ ,  $E' \models \phi$ .

2. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable  $E$  de formules, il existe un ensemble  $E'$  de formules tel que  $E'$  est indépendant et, pour toute formule  $\phi \in E'$ ,  $E \models \phi$ , pour toute formule  $\psi \in E$ ,  $E' \models \psi$ .
3. Montrer qu'il n'est pas toujours possible d'avoir (en plus)  $E' \subseteq E$ .

**Exercice 16 (8)**

On considère  $n$  coffres, chacun contenant un trésor ou une bombe. Le problème est de déterminer le contenu exact de chacun des coffres. Pour cela, on peut poser par écrit une liste de  $N$  questions (formules du calcul propositionnel, les variables propositionnelles étant le contenu des coffres). On obtient, une fois la liste complète des questions établies, la réponse (i.e. l'interprétation) aux  $N$  questions. Mais il est possible que (au plus)  $k$  des  $N$  réponses soient incorrectes.

Etant donnés  $n, k$ , on s'intéresse au problème de trouver le  $N$  minimal, et les questions correspondantes, de manière à déterminer à coup sûr le contenu des coffres.

Donner le  $N$  minimal (et les questions correspondantes) dans les cas suivants.

1.  $k = 0$  et  $n$  quelconque
2.  $n = k = 1$
3.  $n \leq 5$ ,  $k = 1$
4.  $k = 1$  et  $n$  quelconque

Prendre soin dans chaque cas de justifier la réponse.

Parmi les théorèmes célèbres (en calcul des prédicats), le théorème de compacité, énoncé ici dans le cas propositionnel, permet de ramener l'insatisfaisabilité à l'insatisfaisabilité finie.

**Théorème 2.2.1 (compacité)** *Un ensemble de formules du calcul propositionnel sur  $\mathcal{P} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est insatisfaisable si et seulement si il contient un sous-ensemble fini de formules insatisfaisable.*

Preuve:

Soit  $\geq$  la relation d'ordre sur  $\mathcal{P}$  définie par  $A_n \geq A_m$  si et seulement si  $n \geq m$ . Une *interprétation partielle* est une fonction de  $\mathcal{P}$  dans  $\{0, 1\}$  dont le domaine de définition est un ensemble  $\{Q \in \mathcal{P} \mid Q < P\}$  pour un certain  $P \in \mathcal{P}$ . (on notera en indice de l'interprétation partielle le majorant  $P$  de son domaine de définition). L'ensemble des interprétations partielles est alors ordonné par prolongement :  $I_{P_1} \leq I_{P_2}$  si  $P_1 \leq P_2$  et  $I_{P_2}$  restreinte aux variables propositionnelles inférieures à  $P_1$  coïncide avec  $I_{P_1}$ .

On peut représenter graphiquement cet ordre sous forme d'un arbre des interprétations partielles (cf. figure 2.1).

Soit maintenant un ensemble  $S$  insatisfaisable. On peut supposer sans perdre de généralité que  $S$  ne contient pas deux formules logiquement équivalentes. Si l'ensemble des variables propositionnelles intervenant dans les formules de  $S$  est fini, alors  $S$  est fini (cf. exercice 5). On peut donc supposer sans perdre de

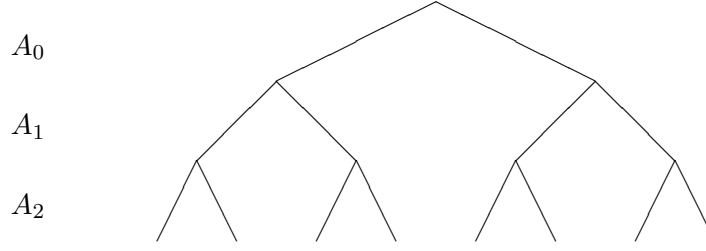


FIGURE 2.1 – arbre des interprétations partielles

généralité que l'ensemble  $\mathcal{P}$  est infini et que toute variable de  $\mathcal{P}$  apparaît dans au moins une formule de  $S$ .

Une interprétation partielle  $I$  *falsifie* une formule  $\phi \in S$  si les variables de  $\phi$  sont dans le domaine de définition de  $I$  et  $I \not\models \phi$ .

Considérons l'arbre des interprétations partielles qui ne falsifient aucune formule de  $S$ . Formellement : soit

$$\mathcal{E} = \{I_P \mid I_P \models S \cap \mathcal{F}(\{Q \in \mathcal{P}, Q \leq P\})\}$$

Si  $I$  ne falsifie aucune formule de  $S$  et  $J \leq I$ , alors  $J$  ne falsifie aucune formule de  $S$  :  $I \in \mathcal{E}$  et  $J \leq I$  entraîne  $J \in \mathcal{E}$ .

Par l'absurde, supposons que  $\mathcal{E}$  est infini. On construit alors par récurrence une suite  $I_{A_n} \in \mathcal{E}$ , strictement croissante, et telle que  $\{J \mid J \geq I_{A_n}\} \cap \mathcal{E}$  est infini. (Autrement dit, on construit un chemin infini dans l'arbre) :

- $I_{A_0}$  est l'interprétation de domaine vide (elle est dans  $\mathcal{E}$  puisque  $\mathcal{E}$  est clos par le bas).
- $I_{A_n}$  étant construite, soient  $I_{A_n}^j$  les deux prolongements de  $I_{A_n}$  à  $A_n$  :  $\text{Dom}(I_{A_n}^j) = \{Q \mid Q \leq A_n\}$  et  $I_{A_n}^j(A_n) = j$ , pour  $j = 0, 1$ .  $\mathcal{E}_n = \{J \in \mathcal{E}, J \geq I_{A_n}\}$  est infini par hypothèse de récurrence et, de plus,

$$\mathcal{E}_n = \{I_{A_n}\} \cup \{J \in \mathcal{E} \mid J \geq I_{A_n}^0\} \cup \{J \in \mathcal{E} \mid J \geq I_{A_n}^1\}$$

L'un de ces deux derniers ensembles au moins est donc infini. On pose alors  $I_{A_{n+1}} = I_{A_n}^j$  pour  $j$  tel que  $\{J \in \mathcal{E} \mid J \geq I_{A_n}^j\}$  est infini. On a bien  $I_{A_{n+1}} > I_{A_n}$ .

Soit alors l'interprétation  $I$  définie par : pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $I(A_i) = I_{A_{i+1}}(A_i)$ . Notons que, par croissance de la suite  $I_{A_i}$ , si  $j < i$ ,  $I(A_j) = I_{A_{i+1}}(A_j)$ . Pour toute formule  $\phi \in S$ , si  $i$  est l'indice maximal d'une variable propositionnelle de  $\phi$ ,  $I_{A_{i+1}} \models \phi$ , et donc  $I \models \phi$ . Il en résulte que  $I \models S$ , ce qui contredit l'insatisfaisabilité de  $S$ .

Il en résulte que l'arbre  $\mathcal{E}$  est fini. L'ensemble des domaines des interprétations partielles de  $\mathcal{E}$  est donc borné : soit  $N$  tel que  $\bigcup_{I \in \mathcal{E}} \text{Dom}(I) \subseteq \{Q \mid Q < A_N\}$ .  $S_0 = S \cap \mathcal{F}(\{Q \mid Q \leq A_N\})$  est alors insatisfaisable et c'est un ensemble fini (d'après l'exercice 5 et puisque nous avons supposé que  $S$  ne contient pas deux

formules logiquement équivalentes).  $\square$

**Exercice 17 (3)**

Montrer qu'un graphe est coloriable avec  $k$  couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec  $k$  couleurs.

**Exercice 18 (5)**

Soit  $E$  un ensemble de formules du calcul propositionnel sur  $\mathcal{P}$ . On dira que  $E$  est *maximal cohérent* si  $E$  est satisfaisable et que, pour toute formule  $\phi$  du calcul propositionnel, ou bien  $\phi \in E$  ou bien  $E \cup \{\phi\}$  est insatisfaisable.

1. Supposant que  $\mathcal{P}$  est fini, montrer que tout ensemble de formules  $E$  satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.
2. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner (toujours dans le cas où  $\mathcal{P}$  est fini) un ensemble  $E$  et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant  $E$ .
3. Que devient le résultat de la première question lorsque  $\mathcal{P}$  est infini dénombrable ?

**Exercice 19 (7)**

Étant données une famille d'interprétations  $(I_\alpha)_{\alpha \in E}$ , leur intersection est l'interprétation  $I$  telle que  $I(P) = 1$  ssi  $(I_\alpha(P) = 1$  pour tout  $\alpha \in E)$ .

Soit  $\Sigma$  un ensemble de formules de  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ . On dit que  $\Sigma$  est *préservé par intersections finies* si, l'intersection de deux modèles de  $\Sigma$  est un modèle de  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est *préservé par intersections* si toute intersection de modèles de  $\Sigma$  est un modèle de  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est *axiomatisé* par  $\Gamma$  si, pour tout  $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ ,  $\Gamma \models \phi$  si et seulement si  $\Sigma \models \phi$ .

1. Montrer que  $\Sigma$  est préservé par intersections finies si et seulement si  $\Sigma$  est préservé par intersections.
2. Une *clause* est une formule

$$A_1 \vee \dots \vee A_n$$

dans laquelle les  $A_i$  sont des variables propositionnelles (appelés *littéraux positifs*) ou des négations de variables propositionnelles (appelées *littéraux négatifs*). Une *clause de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.

Montrer que  $\Sigma$  est axiomatisable par un ensemble de clauses de Horn si et seulement si  $\Sigma$  est stable par intersections. (On pourra supposer, sans perte de généralité, que  $\Sigma$  est un ensemble de clauses).

**Exercice 20 (6)**

On suppose ici que  $\mathcal{P}$  est dénombrable.

1. Soient  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  deux ensembles de formules de  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$  et  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  leurs ensembles respectifs de modèles. Donner un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  dont  $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$  est l'ensemble des modèles.
2. Plus généralement, montrer que, si  $\mathcal{M}$  est un sous-ensemble fermé de  $2^{\mathcal{P}}$  (cf. exercice 9 pour la définition de la topologie), alors il existe un ensemble de formules  $\mathcal{E}$  dont  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des modèles.