6.10 Problèmes de pavages

Le problème de pavage de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (les définitions sont semblables pour d'autres sous-ensembles de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$) est défini par :

Donnée : un ensemble fini $T = \{t_0, \dots, t_k\}$ de *tuiles* et deux sous-ensembles H, V de $T \times T$. (Les relations de compatibilité horizontale et verticale).

Question : existe-t-il une fonction de pavage $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto T$ telle que $f(0,0) = t_0$ et, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $(f(i,j), f(i,j+1)) \in H$, $(f(i,j), f(i+1,j)) \in V$.

Théorème 6.10.1 *Le problème de savoir, étant donnés T, V, H si $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est pavable, est indécidable.*

Pour simplifier, notons d'abord que le problème $\mathcal{P}$:

Donnée : une machine de Turing M, qui ne revient jamais en début de ruban, ne revient jamais dans l'état initial, n'écrit jamais de blancs.

Question : Est ce que M ne s'arrête pas sur le mot vide ?

est indécidable.

Tout d'abord, le problème du non-arrêt sur le mot vide est indécidable. Il suffit en effet de réduire le problème du non-arrêt en construisant à partir de $< M, w >$ une machine M_w qui commence par écrire w sur le ruban, puis simule M.

Étant donnée une machine de Turing M_1, on construit ensuite une machine M, qui ne revient jamais en début de ruban, ne revient jamais dans létat initial, nécrit jamais B et s'arrête sur le mot vide ssi M_1 s'arrête sur le mot vide.

On ajoute pour cela deux états q_0, q_1 à Q_{M_1}, un symbole \$ et un symbole B ; M commence par avancer (en passant de q_0 à q_1) puis écrit $\$_{M_1}$, passe dans l'état initial de M_1 et simule M ; chaque transition $\delta_{M_1}(q, B_{M_1}) = (q', a, m)$ est doublée d'une transition $\delta_{M'}(q, B) = (q', a, m)$.

On réduit ensuite $\mathcal{P}$ au problème de pavage. On choisit pour $T = (\Sigma \cup Q)^3 \cap \Sigma^*(Q+\epsilon)\Sigma^*$ (autrement dit, les mots de longueur 3 contenant au plus un symbole de Q).

$$H = \{(atc, tcb) \mid atc, tcb \in T, a, c, b \in \Sigma \cup Q, c = B \Rightarrow b = B\}$$

$$
\begin{array}{rclll}
V = & \{ & (bcq, bca') & \mid b,c \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\rightarrow) & \} \\
\cup & \{ & (cqa, ca'q') & \mid c \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\rightarrow) & \} \\
\cup & \{ & (qad, a'q'd) & \mid d \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\rightarrow) & \} \\
\cup & \{ & (ade, q'de) & \mid d,e \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\rightarrow), a \neq \$ & \} \\
\cup & \{ & (bcd, bcq') & \mid b,c,d \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\leftarrow) & \} \\
\cup & \{ & (cdq, cq'd) & \mid c,d \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\leftarrow) & \} \\
\cup & \{ & (dqa, q'da') & \mid d \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\leftarrow) & \} \\
\cup & \{ & (qae, da'e) & \mid d,e \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\leftarrow) & \} \\
\cup & \{ & (aef, a'ef) & \mid e,f \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\leftarrow) & \} \\
\cup & \{ & (bcq, bcq') & \mid b,c \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\downarrow) & \} \\
\cup & \{ & (cqa, cq'a') & \mid c \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\downarrow) & \} \\
\cup & \{ & (qad, q'a'd) & \mid d \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\downarrow) & \} \\
\cup & \{ & (ade, a'de) & \mid d,e \in \Sigma, \delta(q,a) = (q',a',\downarrow) & \} \\
\cup & \{ & (\$BB, q_1BB) & \mid \delta(q_0,\$) = (q_1,\$,\rightarrow) & \} \\
\cup & \{ & (\alpha, \alpha) & \mid \alpha \in \Sigma^3 & \}
\end{array}
$$

Les premières pièces verticales correspondent à des fenêtres glissantes sur les séquences

Mouvement droit :

$$
\begin{array}{cccccc}
b & c & a' & q' & d & e \\
b & c & q & a & d & e
\end{array}
$$

Mouvement gauche :

$$
\begin{array}{ccccccc}
b & c & q' & d & a' & e & f \\
b & c & d & q & a & e & f
\end{array}
$$

Mouvement sur place :

$$
\begin{array}{cccccc}
b & c & q' & a' & d & e \\
b & c & q & a & d & e
\end{array}
$$

Enfin, on demande que le pavage satisfasse $f(0,0) = q_0\$B$.

Si M ne s'arrête pas sur le mot vide. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note γ_n le codage de la $n$ième configuration atteinte par M : $\gamma_n = w_n q w'_n$ et $\alpha_{i,n}$ est la ième lettre de γ_n si i est inférieur ou égal à la longueur de γ_n et B sinon.

On considère alors $f(i,j) = \alpha_{i,j}\alpha_{i+1,j}\alpha_{i+2,j}$. Pour tous i,j, $\alpha_{i,j} \in T$ et $f(0,0) = q_0\$B$.

Montrons que f est un pavage :

— pour tous i,j, $(f(i,j), f(i+1,j)) \in H$, par construction

— Pour tout n, il existe un unique entier m_n tel que $\alpha_{m_n,n} \in Q$. Par hypothèse sur M, $m_n = 0$ ssi $n = 0$. Comme γ_{n+1} est la configuration obtenue par un mouvement de M à partir de γ_n, $\forall n, \forall i < m_n - 1.\alpha_{i,n} = \alpha_{i,n+1}$ et $\forall n, \forall i > m_n + 1, \alpha_{i,n} = \alpha_{i,n+1}$. En particulier, pour tout $i \notin \{m_n - 3, m_n - 2, m_n - 1, m_n, m_n + 1\}$, $f(i,n) = f(i,n+1) \in \Sigma^3$. Donc $(f(i,n,i), f(i,n+1)) \in V$ dans ces cas.

Soit

$$\alpha_{m_n-3,n}\alpha_{m_n-2,n}\alpha_{m_n-1,n}\alpha_{m_n,n}\alpha_{m_n+1,n}\alpha_{m_n+2,n}\alpha_{m_n+3,n}\} = a_1a_2a_3qa_4a_5a_6$$

Si $\delta(q, a_4) = q', b \rightarrow$, alors

$$\alpha_{m_n-3,n+1}\alpha_{m_n-2,n+1}\alpha_{m_n-1,n+1}\alpha_{m_n,n+1}\alpha_{m_n+1,n+1}\alpha_{m_n+2,n+1}\alpha_{m_n+3,n+1} = a_1a_2a_3bq'a_5a_6$$

On vérifie alors que $(f(m_n-3, n), f(m_n-3, n+1)) = (a_1a_2a_3, a_1a_2a_3) \in V$, $(f(m_n - 2, n), f(m_n - 2, n + 1)) = (a_2a_3q, a_2a_3b) \in V$, $(f(m_n - 1, n), f(m_n - 1, n + 1)) = (a_3qa_4, a_3bq') \in V$, $(f(m_n, n), f(m_n, n + 1)) = (qa_4a_5, bq'a_5) \in V$, $(f(m_n+1, n), f(m_n+1, n+1)) = (a_4a_5a_6, q'a_5a_6) \in V$. Dans ce dernier cas, a_4 est en effet différent de \$, sauf si $q = q_0, q' = q_1, a_5 = a_6 = B$, par hypothèse sur M. Et dans ce cas particulier, on a aussi $(\$BB, q_1BB) \in V$.
Si $\delta(q, a_4) = q', b \leftarrow$ ou bien $\delta(q, a_4) = q', b, \downarrow$, on vérifie de même que les relations de compatibilité verticale sont satisfaites.

Si f est un pavage du quart de plan. On note $\alpha_{i,j}$ la première lettre de $f(i, j)$. On montre alors, par récurrence sur n que la $n$ème ligne est un codage de la configuration atteinte par M après n mouvements : pour tout n, il existe m_n et k_n tels que

— $\alpha_{m_n,n} \in Q$ et $\forall i \neq m_n$, $\alpha_{i,n} \in \Sigma$
— $\forall i > k_n, \alpha_{i,} = B$ et $\forall i \leq k_n, \alpha_{i,n} \neq B$.
— Si $w_n = \alpha_{0,n} \cdots \alpha_{m_n-1,n}$, $q_n = \alpha_{m_n,n}$, $w'_n = \alpha_{m_n+1,n} \cdots \alpha_{k_n,n}$, alors $(w_n, q_n, w'_n) \vdash_M (w_{n+1}, q_{n+1}, w'_{n+1})$
— (w_0, q_0, w'_0) est la configuration initiale de M

— pour $n = 0$, la première ligne contient la configuration initiale ; $f(0, 0) = q_0\$B$ et donc $f(1, 0) = \$BB$ et $f(2, 0) = BBB$. Par récurrence sur $m \geq 0$, $f(m + 2, 0) = B^3$, par compatibilité horizontale.
— pour $n = 1$, par compatibilité verticale, $f(0, 1) = \$q_1B$ et, de même que ci-dessus, $f(1, 1) = q_1BB$ et pour $i \geq 2, f(i, 1) = B^3$.
— Supposons la propriété vraie pour $n \geq 1$ et soit $\gamma_n = w_nq_nw'_n$. $m_n > 0$, par hypothèse sur M.

Lemme. Remarquons d'abord que, si $f(i, n), f(i + 1, n), f(i + 2, n) \in \Sigma^3$, alors $f(i + 1, n + 1) = f(i + 1, n)$, par compatibilités horizontales et verticales : lorsque $f(i + 1, n) \in \Sigma^3$, $f(i + 1, n + 1) \neq f(i + 1, n)$ n'est possible que dans l'un des cas suivants, par compatibilité verticale :

1. $f(i + 1, n) = ade$, $d, e \in \Sigma$, $\delta(q, a) = (q', a', \rightarrow)$. Dans ce cas, $f(i + 1, n + 1) = q'de$
2. $f(i + 1, n) = bcd$, $b, c, d \in \Sigma$, $\delta(q, a) = (q', a', \leftarrow)$. Dans ce cas, $f(i + 1, n + 1) = bcq'$
3. $f(i + 1, n) = aef$, $e, f \in \Sigma$, $\delta(q, a) = (q', a', \leftarrow)$. Dans ce cas, $f(i + 1, n + 1) = a'ef$
4. $f(i + 1, n) = ade$, $d, e \in \Sigma$, $\delta(q, a) = (q', a', \downarrow)$. Dans ce cas $f(i + 1, n + 1) = a'de$

— Dans le premier cas, par compatibilité horizontale, $f(i, n+1) = cq'd$ et par compatibilité verticale, on ne peut pas avoir $f(i, n) \in \Sigma^3$.
— Dans le deuxième cas, par compatibilité horizontale, $f(i+2, n+1) = cq'd$ et, par compatibilité verticale, on ne peut pas avoir $f(i+2, n) \in \Sigma^3$.
— Dans le toisième cas, par compatibilités horizontales, $f(i, n) = \alpha ae$ et $f(i, n+1) = \beta a'\gamma$. Par compatibilité verticale, ceci n'est possible que quand $\alpha \in Q$
— Le dernier cas est semblable au précédent.

Revenons à la preuve de la récurrence. Comme

$$(\alpha_{n,m_n-1} q_n \alpha_{n,m_n+1}, \alpha_{n+1,m_n-1} \alpha_{n+1,m_n} \alpha_{n+1,m_n+1}) \in V$$

par définition de V seuls trois cas se présentent :

1. $\delta(q_n, \alpha_{n,m_n+1}) = (q, a', \rightarrow)$ **et** $\alpha_{m_n-1,n} = \alpha_{m_n-1,n+1}$ **et** $\alpha_{m_n,n+1} = a'$ **et** $\alpha_{m_n+1,n+1} = q$**.**

1.1. Montrons d'abord dans ce cas, par récurrence sur i**, que** $\alpha_{m_n-i-1,n+1} = \alpha_{m_n-i-1,n}$**.** C'est le cas par hypothèse quand $i = 0$. Supposons $m_n > 1$ (sinon, il n'y a plus rien à démontrer). Pour $i = 1$, $f(m_n-2, n) = \alpha_{m_n-2,n} \alpha_{.m_n-1,n} q_n$ et $f(m_n-2, n+1) = \alpha_{m_n-2,n+1}, \alpha_{m_n-1,n} a'$. Par définition de V, $(f(m_n-2, n), f(m_n-2, n+1)) \in V$ entraine $\alpha_{m_n-2,n+1} = \alpha_{m_n-2,n}$. Si $i > 1$, alors $f(m_n-i-1, n) \in \Sigma^3$ (puisque, par hypothèse de récurrence, γ_n est une configuration de M). Par définition de V, trois cas sont alors a priori possibles pour $f(m_n-i-1, n+1)$:
— ou bien $f(m_n-i-1, n+1) = \alpha_{m_n-i-1,n} \alpha_{m_n-i,n} q$ pour un certain $q \in Q$.
— ou bien $f(m_n-i-1, n+1) = q\alpha_{m_n-i,n} \alpha_{m_n-i+1,n}$, pour un certain $q \in Q$.
— ou bien $f(m_n-i-1, n+1) = c\alpha_{m_n-i,n} \alpha_{m_n-i+1,n}$ avec $c \in \Sigma$ et $\delta(q, \alpha_{m_n-i-1,n}) = (q', c, \downarrow)$

Le premier cas est impossible puisqu'on devrait avoir $f(m_n-i, n+1) \in \Sigma \cdot Q \cdot \Sigma$ par compatibilité horizontale, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Dans le deuxième cas, par construction de V, $\alpha_{m_n-i-1,n} \neq \$$ et donc (puisque γ_n est une configuration de M), $m_n > i+1$. Alors $f(m_n-i-2, n), f(m_n-i-1, n), f(m_n-i, n) \in \Sigma^3$ ce qui entraine, comme nous l'avons vu plus haut dans le lemme, $f(m_n-i, n+1) = f(m_n-i, n)$.

Dans le dernier cas, $\alpha_{m_n-i-1,n} \neq \$$ (puisqu'il n'y a pas de mouvement à droite), et donc, comme dans le cas précédent, $f(m_n-i, n+1) = f(m_n-i, n)$.

Ceci termine la récurrence : pour tout $k < m_n$, $\alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n}$.

1.2 Notons ensuite que $\alpha_{m_n+2,n+1} = \alpha_{m_n+2,n}$ **et** $\alpha_{m_n+3,n} = \alpha_{m_n+3,n+1}$**.** :
$(q_n \alpha_{m_n+1,n} \alpha_{m_n+2,n}, a' q \alpha_{m_n+2,n+1}) \in V$. Par définition de V, ceci

n'est possible (avec $q_n, q \in Q$) que quand les deux dernières lettres sont identiques. De même, $(abc, qbc') \in V$ seulement si $c = c'$ et donc $\alpha_{n,m_n+3} = \alpha_{n+1,m_n+3}$.
1.3. Pour $i > 1$, $f(m_n + i, n + 1) = f(m_n + i, n)$
car $f(m_n + i - 1, n), f(m_n + i, n), f(m_n + i + 1, n) \in \Sigma^3$ et d'après le lemme prouvé plus haut.

2. $\delta(q_n, \alpha_{m_n+1,n}) = (q, b, \leftarrow)$ **et** $\alpha_{m_n-1,n+1} = q$ **et** $\alpha_{m_n,n+1} = \alpha_{m_n-1,n}$ **et** $\alpha_{m_n+1,n+1} = b$**.** On procède de la même manière que ci-dessus.

3. $\delta(q_n, \alpha_{m_n+1,n}) = (q.b, \downarrow)$ **et** $\alpha_{m_n-1,n+1} = \alpha_{m_n-1,n}$ **et** $\alpha_{m_n,n+1} = q$ **et** $\alpha_{m_n+1,n+1} = b$**.** On procède de la même manière que ci-dessus.

On conclut donc que l'on peut paver le quart de plan si et seulement si, pour tout n, il existe une séquence de configurations $\gamma_0 \vdash_M \cdots \vdash \gamma_{n-1} \vdash_M \gamma_n$. Autrement dit, on peut paver le quart de plan si et seulement si M ne s'arrête pas sur le mot vide.

Exercice 177

Dans cette partie, on se donne un ensemble fini $C = \{W, P, R, G, B...\}$ de *couleurs*. Un *domino* est un quadruplet de couleurs $(c_L, c_H, c_R, C_B) \in C^4$, que l'on peut représenter graphiquement comme sur la figure 6.2. Étant donné un ensemble fini D de dominos et un domino distingué $d_0 \in D$, un *pavage* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par D est une application p de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans D telle que :

1. $p(0, 0) = d_0$
2. Si $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $p(i, j) = (c_L^{i,j}, c_H^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j})$, $p(i, j+1) = (c_L^{i,j+1}, c_H^{i,j+1}, c_R^{i,j+1}, c_B^{i,j+1})$, alors $c_H^{i,j} = c_B^{i,j+1}$.
3. Si $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $p(i, j) = (c_L^{i,j}, c_H^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j})$, $p(i+1, j) = (c_L^{i+1,j}, c_H^{i+1,j}, c_R^{i+1,j}, c_B^{i+1,j})$, alors $c_R^{i,j} = c_L^{i+1,j}$.

r est la rotation sur les dominos : $r(c_L, c_H, c_R, C_B) = (c_H, c_R, c_B, c_L)$. Un *pavage sans orientation* de S par D est un pavage de S par $D \cup r(D) \cup r^2(D) \cup r^3(D)$.

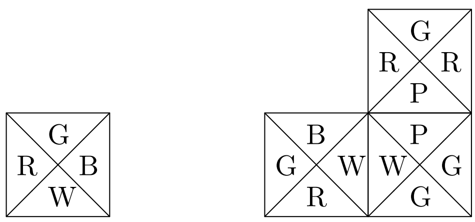

FIGURE 6.2 – Un exemple de tuile/d'un assemblage de tuiles

1. Montrer que les problèmes suivants sont indécidables :

   (a) **Donnée** un ensemble fini de couleurs C et un ensemble fini de dominos D sur C et un domino $d_0 \in D$

Question existe-t-il un pavage de $\mathbb{N}^2$ par D ?

(b) **Donnée** un ensemble fini de couleurs C et un ensemble fini de dominos D sur C et un domino $d_0 \in D$

Question existe-t-il un pavage sans orientation de $\mathbb{N}^2$ par D ?

2. Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : un ensemble fini S de formules du premier ordre sur un ensemble $\{P_1, \ldots, P_n\}$ de symboles de prédicats binaires et l'ensemble $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ de symboles de fonction.

Question : S est il satisfaisable ?

Exercice 178 (6)

1. Le problème suivant est-il décidable ?

Donnée : Un ensemble fini de tuiles T, deux relations de compatibilité $H, V \subseteq T \times T$ et une tuile de bordure $t_0 \in T$

Question : Existe-t-il un rectangle (non vide) que l'on peut paver avec T ?

Un rectangle $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ est pavable (par T, V, H, t_0) s'il existe une application $f : [0, ..., n+1] \times [0, m+1] \to T$ telle que

— pour tout i, $f(0, i) = f(i, m+1) = f(i, 0) = f(n+1, i) = t_0$

— pour tout $i \leq n$, pour tout j, $(f(i,j), f(i+1,j)) \in H$

— pour tout $j \leq m$, pour tout i, $(f(i,j), f(i,j+1)) \in V$

— pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq m$, $f(i,j) \neq t_0$

Un rectangle est non vide quand $n, m \geq 1$.

2. Le problème suivant est il décidable ?

Donnée : un ensemble fini de formules S de la logique du premier ordre

Question : S a un modèle fini