

Problème de correspondance de Post

Donnée: $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*$

Question: $\exists k, \exists i_1, \dots, i_k. u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$

Problème de correspondance de Post modifié

Donnée: $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*$

Question: $\exists k, \exists i_1, \dots, i_k. u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ **et $i_1 = 1$**

Problème de correspondance de Post modifié

Donnée: $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*$

Question: $\exists k, \exists i_1, \dots, i_k. u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ **et $i_1 = 1$**

Théorème: PCP modifié est indécidable

Problème de correspondance de Post modifié

Donnée: $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*$

Question: $\exists k, \exists i_1, \dots, i_k. u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ **et $i_1 = 1$**

Théorème: PCP modifié est indécidable

Preuve: On réduit le problème de l'arrêt sur le mot vide d'une machine de Turing qui efface son entrée quand elle s'est arrêtée.

La réduction sur un exemple

M :

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, \$, \downarrow
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

La réduction sur un exemple

$$M : \begin{array}{c|cc} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

Calcul sur ϵ :

$q_0\$ \vdash \$q_0 \vdash \$0q_e \vdash \$q_e0 \vdash q_e\$ \vdash \text{accept}\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

Calcul sur ϵ : $q_0\$ \vdash \$q_0 \vdash \$0q_e \vdash \$q_e0 \vdash q_e\$ \vdash \text{accept}\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

Calcul sur ϵ : $q_0\$ \vdash \$q_0 \vdash \$0q_e \vdash \$q_e0 \vdash q_e\$ \vdash \text{accept}\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, \$, \downarrow
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	
u	
v	

La réduction sur un exemple

$$M :$$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$
v	\triangleleft

La réduction sur un exemple

$$M :$$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$
v	\triangleleft

La réduction sur un exemple

$$M : \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$
v	$\triangleleft \quad \quad \quad q_0 \$$

La réduction sur un exemple

$$M : \begin{array}{c|cc} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$

La réduction sur un exemple

$$M : \begin{array}{c|cc} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$
v	\triangleleft	$q_0 \$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$
v	\triangleleft	$q_0 \$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$
v	\triangleleft	$q_0 \$ \star$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, \$, \downarrow
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, \$, \downarrow
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star
v	\triangleleft	$q_0 \$$	$\star \quad \$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, \$, \downarrow
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, \$, \downarrow
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$ q_0 \star$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0 \star$	\star	$\$$	$0 q_e \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$

La réduction sur un exemple

M :

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$ $\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$

La réduction sur un exemple

M :

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	accept, $\$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3	7.\$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$ 0 q_e \star$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3	7.\$	4
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3	7.\$	4
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\langle q_0 \$ \star$	\langle	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$	4
u	$\langle q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$
v	\langle	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$

La réduction sur un exemple

M :

δ	q_0	q_e
$\$$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$	4
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$ $\$ q_e 0 \star$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3	7.\$	4	5.\$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$	$\$ q_e 0 \star$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3	7.\$	4	5.\$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$	$q_e \$ \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$	$\$ q_e 0 \star$

La réduction sur un exemple

$$M :$$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7.★	7.\$	3	7.\$	4	5.\$
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$	$q_e \$ \star$
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$	$\$ q_e 0 \star$

La réduction sur un exemple

$M :$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$	4	5. $\$$	
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$	$q_e \$ \star$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$	$\$ q_e 0 \star$	$q_e \$ \star \triangleright$

La réduction sur un exemple

$$M:$$

δ	q_0	q_e
\$	$q_0, \$, \rightarrow$	$\text{accept}, \$, \downarrow$
B	$q_e, 0, \rightarrow$	q_e, B, \leftarrow
0		q_e, B, \leftarrow

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$	4	5. $\$$	6
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$	$q_e \$ \star$	
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$	$\$ q_e 0 \star$	$q_e \$ \star \triangleright$

La réduction sur un exemple

$$M: \begin{array}{c|c|c} \delta & q_0 & q_e \\ \hline \$ & q_0, \$, \rightarrow & \text{accept}, \$, \downarrow \\ B & q_e, 0, \rightarrow & q_e, B, \leftarrow \\ 0 & & q_e, B, \leftarrow \end{array}$$

i	u_i	v_i	
1	$\triangleleft q_0 \$ \star$	\triangleleft	
2	$\$ q_0$	$q_0 \$$	
3	$0 q_e \star$	$q_0 \star$	
4	$q_e 0 \star$	$0 q_e \star$	
5.a	$q_e a \star$	$a q_e 0 \star$	$a \in \{\$, 0\}$
6	\triangleright	$q_e \$ \star \triangleright$	
7.a	a	a	$a \in \{0, \$, \star\}$

Calcul sur ϵ : $q_0 \$ \vdash \$ q_0 \vdash \$ 0 q_e \vdash \$ q_e 0 \vdash q_e \$ \vdash \text{accept} \$$

i	1	2	7. \star	7. $\$$	3	7. $\$$	4	5. $\$$	6
u	$\triangleleft q_0 \$ \star$	$\$ q_0$	\star	$\$$	$0 q_e \star$	$\$$	$q_e 0 \star$	$q_e \$ \star$	\triangleright
v	\triangleleft	$q_0 \$$	\star	$\$$	$q_0 \star$	$\$$	$0 q_e \star$	$\$ q_e 0 \star$	$q_e \$ \star \triangleright$

La réduction en général

- | | v_i | u_i | |
|------|-------------------------------|--------------------------------|---|
| 1. | \triangleleft | $\triangleleft q_0 \$ w \star$ | |
| 2.* | a | a | pour $a \in \Sigma$ |
| 3.* | qa | $a'q'$ | si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$ |
| 4.* | aqb | $q'ab'$ | si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$ |
| 5.* | qa | $q'a'$ | si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$ |
| 6.* | $q\star$ | $aq'\star$ | si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$ |
| 7.* | $bq\star$ | $q'ba'\star$ | si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$ |
| 8.* | $q\star$ | $q'a\star$ | si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$ |
| 9. | $q_e \$ \star \triangleright$ | \triangleright | |
| 10. | \star | \star | |
| 11.* | $bq_e a \star$ | $q_e b \star$ | si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$ |
| 12.* | $bq_e \star$ | $q_e b \star$ | si $b \in \Sigma, b \neq B$ |

Si PCP modifié a une solution, alors la machine s'arrête

$$\begin{aligned} \forall m < k. \exists p. \exists s, t. \quad & u_{i_1} \cdots u_{i_m} = \triangleleft \gamma_0 \star \cdots \star \gamma_p \star s \\ & v_{i_1} \cdots v_{i_m} = \triangleleft \gamma_0 \star \cdots \star \gamma_{p-1} \star t \\ & \gamma_0 \vdash \dots \vdash \gamma_{p+1} \\ & \exists x. \gamma_{p+1} = sx \\ & \exists y. \gamma_p = ty \\ & s = t \vee x = y \end{aligned}$$

Par récurrence sur m .

Cas “loin avant la tête de lecture”

... *	s	c... <i>bqa</i> ...	* s	
... *	s			

Cas “loin avant la tête de lecture”

... *	S	$c \dots bqa \dots$	* S
... *	S		

	v_i	u_i	
1.	\triangleleft	$\triangleleft q_0 \$ w \star$	
2.*	a	a	pour $a \in \Sigma$
3.*	qa	$a'q'$	si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$
4.*	aqb	$q'ab'$	si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$
5.*	qa	$q'a'$	si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$
6.*	$q\star$	$aq'\star$	si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$
7.*	$bq\star$	$q'ba'\star$	si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$
8.*	$q\star$	$q'a\star$	si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$
9.	$q_e \$ \star \triangleright$	\triangleright	
10.	\star	\star	
11.*	$bq_e a \star$	$q_e b \star$	si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$
12.*	$bq_e \star$	$q_e b \star$	si $b \in \Sigma, b \neq B$

Cas "loin avant la tête de lecture"

...	*	s	c...	bqa...	*s
...	*	s			

↓ 2.c

...	*	s	c...	bqa...	*s	c
...	*	s	c			

- | v_i | u_i | |
|----------------------------------|--------------------------------|---|
| 1. \triangleleft | $\triangleleft q_0 \$ w \star$ | |
| 2.* a | a | pour $a \in \Sigma$ |
| 3.* qa | $a'q'$ | si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$ |
| 4.* aqb | $q'ab'$ | si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$ |
| 5.* qa | $q'a'$ | si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$ |
| 6.* $q\star$ | $aq'\star$ | si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$ |
| 7.* $bq\star$ | $q'ba'\star$ | si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$ |
| 8.* $q\star$ | $q'a\star$ | si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$ |
| 9. $q_e \$ \star \triangleright$ | \triangleright | |
| 10. \star | \star | |
| 11.* $bq_e a \star$ | $q_e b \star$ | si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$ |
| 12.* $bq_e \star$ | $q_e b \star$ | si $b \in \Sigma, b \neq B$ |

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \leftarrow$

...	*	s	bqa...	*	s	
...	*	s				

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \leftarrow$

...	*	s	bqa...	*s	
...	*	S			

v_i	u_i	
1.	\triangleleft	$\triangleleft q_0 \$ w^*$
2.*	a	a pour $a \in \Sigma$
3.*	qa	$a'q'$ si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$
4.*	aqb	$q'ab'$ si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$
5.*	qa	$q'a'$ si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$
6.*	q^*	aq^* si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$
7.*	bq^*	$q'ba'^*$ si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$
8.*	q^*	$q'a^*$ si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$
9.	$q_e \$^* \triangleright$	\triangleright
10.	*	*
11.*	$bq_e a^*$	$q_e b^*$ si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$
12.*	bq_e^*	$q_e b^*$ si $b \in \Sigma, b \neq B$

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \leftarrow$

...	*	s	<i>bqa</i> ...	* s
...	*	s		

↓ 4. *bqa*

...	*	s	<i>bqa</i> ...	* s	<i>q'ba'</i>
...	*	s	<i>bqa</i>		

- | v_i | u_i | |
|-------|---------------------------|---|
| 1. | \triangleleft | $\triangleleft q_0 \$ w^*$ |
| 2.* | <i>a</i> | <i>a</i> pour $a \in \Sigma$ |
| 3.* | <i>qa</i> | <i>a'q'</i> si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$ |
| 4.* | <i>aqb</i> | <i>q'ab'</i> si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$ |
| 5.* | <i>qa</i> | <i>q'a'</i> si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$ |
| 6.* | <i>q*</i> | <i>aq'*</i> si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$ |
| 7.* | <i>bq*</i> | <i>q'ba'*</i> si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$ |
| 8.* | <i>q*</i> | <i>q'a*</i> si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$ |
| 9. | $q_e \$^* \triangleright$ | \triangleright |
| 10. | * | * |
| 11.* | <i>bq_e a*</i> | <i>q_e b*</i> si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$ |
| 12.* | <i>bq_e *</i> | <i>q_e b*</i> si $b \in \Sigma, b \neq B$ |

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$

...	*	s	bqa...	*	s	
...	*	s				

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$

$\dots \star$	s	$bqa \dots$	$\star s$	
$\dots \star$	s			

	v_i	u_i	
1.	\triangleleft	$\triangleleft q_0 \$ w \star$	
2.*	a	a	pour $a \in \Sigma$
3.*	qa	$a'q'$	si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$
4.*	aqb	$q'ab'$	si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$
5.*	qa	$q'a'$	si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$
6.*	$q\star$	$aq'\star$	si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$
7.*	$bq\star$	$q'ba'\star$	si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$
8.*	$q\star$	$q'a\star$	si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$
9.	$q_e \$ \star \triangleright$	\triangleright	
10.	\star	\star	
11.*	$bq_e a \star$	$q_e b \star$	si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$
12.*	$bq_e \star$	$q_e b \star$	si $b \in \Sigma, b \neq B$

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$

...	*	s	bqa...	*s	
...	*	s			

↓ 2.b

...	*	s	bqa...	*s	b
...	*	s	b		

- | v_i | u_i | |
|-------|---------------------------|--|
| 1. | \triangleleft | $\triangleleft q_0 \$ w^*$ |
| 2.* | a | a pour $a \in \Sigma$ |
| 3.* | qa | $a'q'$ si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$ |
| 4.* | aqb | $q'b'$ si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$ |
| 5.* | qa | $q'a'$ si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$ |
| 6.* | *q | aq' si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$ |
| 7.* | bq* | $q'ba'$ si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$ |
| 8.* | *q | $q'a'$ si $\delta(q, B) = q', a', \downarrow$ |
| 9. | $q_e \$^* \triangleright$ | \triangleright |
| 10. | * | * |
| 11.* | $bq_e a^*$ | $q_e b^*$ si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$ |
| 12.* | bq_e^* | $q_e b^*$ si $b \in \Sigma, b \neq B$ |

Cas "Proche avant la tête de lecture (et loin du bout)"

Si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$

...	*	s	<i>bqa</i> ...	*	s	
...	*	s				

⇓ 2.b

...	*	s	<i>bqa</i> ...	*	s	<i>b</i>
...	*	s	<i>b</i>			

⇓ 3.qa

...	*	s	<i>bqa</i> ...	*	s	<i>ba'q'</i>
...	*	s	<i>bqa</i>			

- | v_i | u_i | |
|-------|-------------------------------|---|
| 1. | \triangleleft | $\triangleleft q_0 \$ w \star$ |
| 2.* | <i>a</i> | <i>a</i> pour $a \in \Sigma$ |
| 3.* | <i>qa</i> | <i>a'q'</i> si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$ |
| 4.* | <i>aqb</i> | <i>q'ab'</i> si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$ |
| 5.* | <i>qa</i> | <i>q'a'</i> si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$ |
| 6.* | <i>q*</i> | <i>aq'*</i> si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$ |
| 7.* | <i>bq*</i> | <i>q'ba'*</i> si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$ |
| 8.* | <i>q*</i> | <i>q'a*</i> si $\delta(q, B) = q', a, \downarrow$ |
| 9. | $q_e \$ \star \triangleright$ | \triangleright |
| 10. | * | * |
| 11.* | <i>bq_e a*</i> | <i>q_e b*</i> si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$ |
| 12.* | <i>bq_e*</i> | <i>q_e b*</i> si $b \in \Sigma, b \neq B$ |

Cas "Proche avant la tête de lecture et au bout du ruban"

Si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$

...	*	S	q	*	S
...	*	S			

Cas "Proche avant la tête de lecture et au bout du ruban"

Si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$

...	*	S	q	* S
...	*	S		

	v_i	u_i	
1.	\triangleleft	$\triangleleft q_0 \$ w^*$	
2.*	a	a	pour $a \in \Sigma$
3.*	qa	$a'q'$	si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$
4.*	aqb	$q'ab'$	si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$
5.*	qa	$q'a'$	si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$
6.*	q^*	aq'^*	si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$
7.*	bq^*	$q'ba'^*$	si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$
8.*	q^*	$q'a^*$	si $\delta(q, B) = q', a', \downarrow$
9.	$q_e \$^* \triangleright$	\triangleright	
10.	*	*	
11.*	$bq_e a^*$	$q_e b^*$	si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$
12.*	bq_e^*	$q_e b^*$	si $b \in \Sigma, b \neq B$

Cas "Proche avant la tête de lecture et au bout du ruban"

Si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$

...	*	S	q	* S
...	*	S		

↓ 6.q

...	*	S	q	* S	a' q' *
...	*	S	q	*	

- | | v_i | u_i | |
|------|---------------------------|----------------------------|---|
| 1. | \triangleleft | $\triangleleft q_0 \$ w^*$ | |
| 2.* | a | a | pour $a \in \Sigma$ |
| 3.* | qa | a' q' | si $\delta(q, a) = q', a', \rightarrow$ et $a \neq B$ |
| 4.* | aqb | q' a b' | si $\delta(q, b) = q', b', \leftarrow$ et $a \neq B$ |
| 5.* | qa | q' a' | si $\delta(q, a) = q', a', \downarrow$ et $a \neq B$ |
| 6.* | q* | a q' * | si $\delta(q, B) = q', a', \rightarrow$ |
| 7.* | bq* | q' b a' * | si $\delta(q, B) = q', a', \leftarrow$ |
| 8.* | q* | q' a * | si $\delta(q, B) = q', a', \downarrow$ |
| 9. | $q_e \$^* \triangleright$ | \triangleright | |
| 10. | * | * | |
| 11.* | $bq_e a^*$ | $q_e b^*$ | si $a, b \in \Sigma, a, b \neq B$ |
| 12.* | bq_e^* | $q_e b^*$ | si $b \in \Sigma, b \neq B$ |

Effacement du ruban

Pourquoi a-t-on demandé que la machine efface son ruban avant de s'arrêter ?

Si la machine s'arrête, alors PCP modifié a une solution

Si $\gamma_0 \vdash \dots \vdash \gamma_p$, alors, par récurrence sur p ,

$$\begin{aligned} \exists i_1, \dots, i_{k_p}. \quad & u_{i_1} \cdots u_{i_{k_p}} = \triangleleft \gamma_0 \star \cdots \star \gamma_p \\ & v_{i_1} \cdots v_{i_{k_p}} = \triangleleft \gamma_0 \star \cdots \star \gamma_{p-1} \end{aligned}$$

PCP est indécidable

Réduction de PCP modifié

$$(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \mapsto (u'_0, \dots, u'_m, v'_0, \dots, v'_m)$$

PCP est indécidable

Réduction de PCP modifié

$$(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \mapsto (u'_0, \dots, u'_m, v'_0, \dots, v'_m)$$

exemple

i	1	2	3	4	5
u_i	c	a	b	ca	abc
v_i	cb	ab	ca	a	c

solution de PCP (mais pas de PCP modifié):

2 3 4 2 5
 a b ca a abc
 ab ca a ab c

La réduction sur un exemple

i	1	2	3	4	5
u_i	c	a	b	ca	abc
v_i	cb	ab	ca	a	c

i	0	1	2	3	4	5	6
u'_i	c	c	a	b	$c a$	$a b c$	
v'_i	$c b$	$c b$	$a b$	$c a$	a	c	

La réduction sur un exemple

i	1	2	3	4	5
u_i	c	a	b	ca	abc
v_i	cb	ab	ca	a	c

i	0	1	2	3	4	5	6
u'_i	$\triangleleft \bullet c$	$\bullet c$	$\bullet a$	$\bullet b$	$\bullet c a$	$\bullet a \bullet b \bullet c$	$\bullet \triangleright$
v'_i	$\triangleleft \bullet c \bullet b \bullet$	$c \bullet b \bullet$	$a \bullet b \bullet$	$c \bullet a \bullet$	$a \bullet$	$c \bullet$	\triangleright

La réduction en général

Pour $w \in \Sigma^*$, \bar{w} et \tilde{w} définis par récurrence par:

- ▶ $\bar{\epsilon} = \tilde{\epsilon} = \epsilon$
- ▶ $\overline{aw} = \bullet aw$
- ▶ $\widetilde{aw} = a \bullet \tilde{w}$

Remarque: $\bar{w}\bullet = \bullet\tilde{w}$

- ▶ $u'_0 = \triangleleft \bar{u}_1, v'_0 = \triangleleft \bullet \tilde{v}_1$
- ▶ Pour $i = 1, \dots, n$, $u'_i = \bar{u}_i$ et $v'_i = \tilde{v}_i$
- ▶ $u'_{n+1} = \bullet \triangleright$ et $v'_{n+1} = \triangleright$.

On suppose (sans perte de généralité) que, pour tout i , $u_i \neq \epsilon$ ou $v_i \neq \epsilon$.

Si PCP modifié (u, v) a une solution, alors PCP (u', v') a une solution

$$u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k} = v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k} \Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \overline{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \bullet \rangle$$

Si PCP modifié (u, v) a une solution, alors PCP (u', v') a une solution

$$\begin{aligned}
 u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k} = v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k} &\Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \overline{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \bullet \rangle \\
 &\Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \bullet \overline{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \rangle
 \end{aligned}$$

Si PCP modifié (u, v) a une solution, alors PCP (u', v') a une solution

$$u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k} = v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k} \Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \overline{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \bullet \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \bullet \widetilde{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overline{u_1} \overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \widetilde{v_1} \widetilde{v_{i_2}} \cdots \widetilde{v_{i_k}} \rangle$$

Si PCP modifié (u, v) a une solution, alors PCP (u', v') a une solution

$$\begin{aligned}
 u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k} = v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k} &\Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \overline{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \bullet \rangle \\
 &\Rightarrow \langle \overline{u_1 u_{i_2} \cdots u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \bullet \widetilde{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_k}} \rangle \\
 &\Rightarrow \langle \overline{u_1} \overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_k}} \bullet \rangle = \langle \widetilde{v_1} \widetilde{v_{i_2}} \cdots \widetilde{v_{i_k}} \rangle \\
 &\Rightarrow u'_0 u'_{i_2} \cdots u'_{i_k} u'_{n+1} = v'_0 v'_{i_2} \cdots v'_{i_k} v'_{n+1}
 \end{aligned}$$

Si PCP (u', v') a une solution, alors PCP modifié (u, v) a une solution

$$u'_{i_1} \cdots u'_{i_m} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_m} \Rightarrow i_1 = 0 \ \& \ i_m = n + 1$$

Si PCP (u', v') a une solution, alors PCP modifié (u, v) a une solution

$$u'_{i_1} \cdots u'_{i_m} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_m} \Rightarrow i_1 = 0 \ \& \ i_m = n + 1$$

Solution la plus courte

$$u'_{i_1} \cdots u'_{i_m} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_m} \Rightarrow \forall 1 \leq j < m, i_j \neq n + 1$$

Si PCP (u', v') a une solution, alors PCP modifié (u, v) a une solution

$$u'_{i_1} \cdots u'_{i_m} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_m} \Rightarrow i_1 = 0 \ \& \ i_m = n + 1$$

Solution la plus courte

$$u'_{i_1} \cdots u'_{i_m} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_m} \Rightarrow \forall 1 \leq j < m, i_j \neq n + 1$$

Effacement des symboles supplémentaires

$$u'_{i_1} \cdots u'_{i_m} = v'_{i_1} \cdots v'_{i_m} \Rightarrow u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} = v_{i_1} \cdots v_{i_{m-1}}$$