

Correction du devoir maison

Question 1 :

Nous considérons dans cette question le problème de pavage suivant :

Problème P_1 :

Donnée : Un ensemble fini de polyominos S .

Question : Est-ce qu'il existe un pavage de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par S ?

Introduisons le problème de l'arrêt des machines de Turing sur le mot vide :

Problème $HP(\varepsilon)$:

Donnée : Un code de machine de Turing $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$.

Question : Est-ce que le calcul de M sur le mot vide termine ?

On a déjà vu que le problème $HP(\varepsilon)$ est indécidable. Réduisons ce problème à P_1 .

Fixons donc une donnée $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$ de $HP(\varepsilon)$. Nous allons définir à partir de ce code un ensemble fini S de polyominos vérifiant :

M ne s'arrête pas sur le mot vide \iff il existe un pavage de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par S

L'intuition de cette construction est la suivante : chaque ligne du pavage correspondra à une configuration de la machine de Turing. On passera d'une ligne à la ligne supérieure en simulant l'exécution d'une étape de calcul de la machine de Turing. Ainsi, nous pourrons paver le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ si et seulement si la machine a une exécution infinie sur le mot vide.

Nous avons besoin de quelques notations pour présenter notre construction. Notons (avec les notations standards) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, F, q_0)$ la description de la machine M . Nous notons B le symbole blanc. B appartient à l'ensemble Γ . Définissons alors la constante $K = |Q| + |\Gamma|$. Dans la suite nous identifierons un élément $x \in Q \cup \Gamma$ avec son "code" appartenant à $[1, K]$.

Nous allons définir les pièces utilisées de manière générique. Ces pièces seront obtenues à partir du rectangle $R = [0, K[\times [0, 4[$. Nous notons les pièces de la manière suivante : étant donné un quadruplet i, j, k, l avec $i, j \in [1, K] \cup \{\perp\}$ et $k, l \in \{\top, \perp\}$, nous définissons la pièce q par

$$q = (h = i, b = j, g = k, d = l)$$

Cette notation signifie que la pièce q est obtenue à partir de R en effectuant les opérations suivantes :

- Si $i \neq \perp$, ajouter un carré en position $(i - 1, 4)$,
- Si $j \neq \perp$, retirer un carré en position $(j - 1, 0)$,
- Si $k \neq \perp$, retirer un carré en position $(0, 2)$,
- Si $l \neq \perp$, ajouter un carré en position $(K, 2)$,

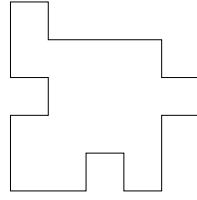
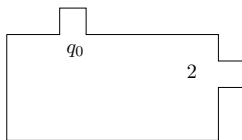


FIG. 1 – Exemple de la pièce $q = (h = 1, b = 3, g = \top, d = \top)$ avec $K = 4$

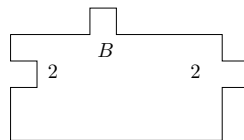
Intuitivement, nous ajoutons un créneau en position i au dessus de la première ligne, la deuxième ligne est utilisée afin de faire les créneaux horizontaux, en enlevant un carré à gauche (si $g = \top$), et en rajoutant un carré à droite (si $d = \top$), la troisième ligne n'est pas modifiée, et enfin la quatrième ligne est éventuellement ajourée d'un créneau en position j . Il est important de vérifier que quelles que soient les valeurs de i, j, k et l , la pièce obtenue est toujours un polyomino. Nous illustrons cette construction sur la figure 1.

Définition de l'ensemble S : Nous pouvons à présent définir l'ensemble S de pièces associé au code $\langle M \rangle$.

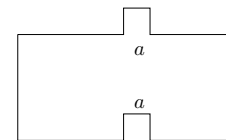
- Afin de coder la configuration initiale, nous ajoutons à S les pièces suivantes :
 - $p_{q_0}^{ini} = (h = q_0, b = \perp, g = \perp, d = \top)$
 - $p_B^{ini} = (h = B, b = \perp, g = \top, d = \top)$
- Pour coder les lignes suivantes, nous ajoutons les pièces :
 - $\forall a \in \Gamma, p_a = (h = a, b = a, g = \perp, d = \perp)$
- Pour coder les règles, nous ajoutons les polyominos suivants :
 - si $r = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleright)$, alors nous ajoutons la pièce p_r obtenue en “juxtaposant” les deux pièces r_1 et r_2 suivantes :
 - $r_1 = (h = b, b = q, g = \perp, d = \perp)$ et $r_2 = (h = q', b = a, g = \perp, d = \perp)$
 - si $r = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleleft)$, alors, pour tout élément $x \in \Gamma$, nous ajoutons la pièce $p_{r,x}$ obtenue en “juxtaposant” les trois pièces r_1, r_2 et r_3 suivantes :
 - $r_1 = (h = q', b = x, g = \perp, d = \perp)$, $r_2 = (h = x, b = q, g = \perp, d = \perp)$ et
 - $r_3 = (h = b, b = a, g = \perp, d = \perp)$



(a) La pièce $p_{q_0}^{ini}$



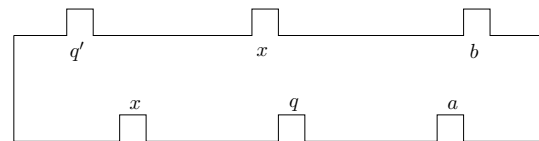
(b) La pièce p_B^{ini}



(c) La pièce $p_a, a \in \Gamma$



(d) La pièce p_r avec $r = (q, a) \rightarrow (q, b, \triangleright)$



(e) La pièce $p_{r,x}$ avec $r = (q, a) \rightarrow (q, b, \triangleleft)$ et $x \in \Gamma$

FIG. 2 – Pièces utilisées dans le codage

Toutes ces pièces sont représentées sur la figure 2.

Démontrons à présent la proposition suivante qui exprime la correction de notre réduction :

Proposition 1 (Correction) *Le calcul de M sur le mot vide ne termine pas si, et seulement si, il existe un pavage de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par S .*

Remarque générale. Une configuration de M est de la forme (w_1, q, w_2) avec w_1, w_2 deux mots de Γ^* et $q \in Q$. À une telle configuration va correspondre la ligne de pièces dont les positions des créneaux du bord supérieur vont correspondre au mot infini $w_1qw_2B^\omega$. Nous dirons que ces créneaux codent la configuration de la machine.

Nous allons montrer, par récurrence sur $k \geq 0$, la propriété suivante :

$\mathcal{P}(k)$: "Le calcul de M sur le mot vide est de longueur $\geq k$ si, et seulement si, il existe un moyen de remplir les $4.(k+1)$ premières lignes du quart de plan. Dans ce cas, ce pavage est unique, et les créneaux restant sur le bord supérieur sont le codage de la configuration atteinte par M après k étapes."

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ Initialement, la configuration de M est q_0B^ω (départ sur le mot vide). D'autre part, les seuls polyominos qui peuvent être placés sur le bord inférieur sont $p_{q_0}^{ini}$ et p_B^{ini} . On vérifie ainsi que le seul pavage des 4 premières lignes est $p_{q_0}^{ini} \cdot (p_B^{ini})^\omega$. On constate enfin que les créneaux du bord supérieur sont le codage de la configuration initiale de M .

Hérédité : $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$. Supposons que nous avons ainsi simulé k pas de la machine de Turing sur l'entrée vide, que nous avons atteint une configuration (w_1, q, w_2) , correspondant au mot infini $w_1qw_2B^\omega$ et que celui-ci est représenté par la position des créneaux du bord supérieur de la $4.(k+1)$ -ème ligne du plan.

- Si la machine peut faire une étape de calcul supplémentaire, alors elle peut appliquer une certaine règle r . Deux cas sont à distinguer selon la nature de r :
 - si $r = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleright)$, alors ceci implique que la première lettre de w_2 est la lettre a (ce que l'on écrit $w_2 = aw'_2$), et que la nouvelle configuration atteinte par M est la configuration (w_1b, q', w'_2) . Comme cette règle peut s'appliquer, par hypothèse de récurrence, les créneaux correspondant à q et à a apparaissent côte à côte. On peut donc ajouter au dessus d'eux la pièce p_r définie plus haut correspondant à la règle r . Pour tous les autres créneaux, correspondant à des lettres $a \in \Gamma$, nous utilisons les pièces p_a pour les "recopier". La nouvelle ligne obtenue correspond ainsi au mot $w_1bq'w'_2B^\omega$, ce qu'il fallait obtenir. De plus, le pavage est unique. En effet, toutes les pièces qui peuvent être utilisées (i.e. p_a, p_r et $p_{r,x}$) sont de longueur $K, 2K$ ou $3K$. Ceci impose donc que les créneaux du bord inférieur des pièces que nous pouvons placer sur la $4.(k+1) + 1$ -ème ligne soient alignés avec les créneaux de la ligne $4.(k+1)$. Pour le créneau correspondant à l'état q , les seules pièces possédant un créneau inférieur en position q sont les pièces correspondant aux transitions. Comme une seule règle s'applique, seule la pièce p_r peut être posée à cet emplacement. L'unicité du reste du pavage en découle.
 - si $r = (q, a) \rightarrow (q', b, \triangleleft)$, le raisonnement est similaire.
- Si la machine ne peut pas faire d'étape de calcul supplémentaire, c'est qu'elle a atteint un état final. Dans ce cas, aucune règle ne s'applique et, en raisonnant comme précédemment, aucune extension du pavage n'est possible.

Ceci conclut la récurrence, et la preuve de la proposition 1. □

Nous pouvons donc déduire de cette réduction, et de l'indécidabilité du problème de l'arrêt des machines de Turing sur le mot vide, l'indécidabilité du problème de pavage considéré.

Question 2.

Nous considérons dans cette question le problème de pavage suivant :

Problème P_2 :

Donnée : Un ensemble fini de polyominos S .

Question : Est-ce qu'il existe un pavage de $[0, n[\times [0, n[$ par S pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$?

Pour prouver l'indécidabilité de ce problème, nous allons à nouveau réduire $HP(\varepsilon)$.

Fixons donc $\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$ une donnée de $HP(\varepsilon)$. Pour cette nouvelle réduction, nous allons construire un nouvel ensemble S' de polyominos, obtenu en ajoutant des polyominos à l'ensemble S construit dans la question précédente. Cet ensemble va vérifier la propriété suivante :

M s'arrête sur le mot vide \iff il existe un pavage de $[0, n[\times [0, n[$ par S' pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$

Nous détaillons maintenant comment S' est obtenu à partir de S . Pour chaque état final $q \in F$ de M , nous ajoutons les pièces suivantes :

- la pièce $p_q^{end} = (h = \perp, b = q, g = \perp, d = \perp)$,
- pour tout $a \in \Gamma$, la pièce $p_a^{end} = (h = \perp, b = a, g = \perp, d = \perp)$,
- la pièce $p_B^{bottom} = (h = B, b = \perp, g = \top, d = \perp)$.

Ces pièces sont représentées sur la figure 3.

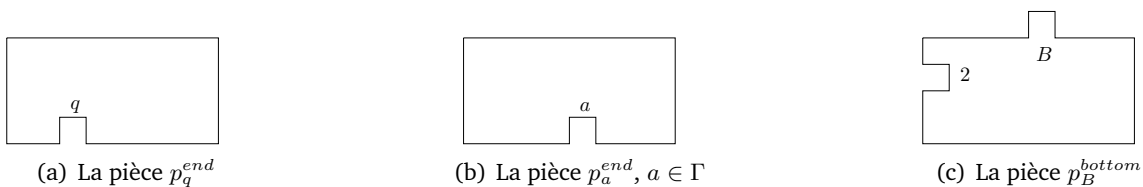


FIG. 3 – Pièces ajoutées pour le codage

Démontrons à présent la correction de cette réduction :

Proposition 2 (Correction) *Le calcul de M sur le mot vide termine si, et seulement si, il existe un pavage de $[0, n[\times [0, n[$ par S' pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.*

Nous démontrons successivement chacune des deux implications. Supposons d'abord que le calcul de M sur le mot vide termine après k étapes. Alors, en utilisant la même construction qu'à la question précédente, dans laquelle on place sur la première ligne $k+1$ blancs, on atteint une ligne codant la configuration finale (w_1, q, w_2) de M . Il est alors facile de constater que l'on peut placer la pièce p_q^{end} au-dessus du créneau de q , puisque q est final. On peut ensuite compléter les autres créneaux à l'aide des pièces p_a^{end} . Enfin, concernant la bande droite, on peut combler le créneau horizontal de la première ligne par une pièce p_B^{bottom} , puis rejoindre le haut du pavage à l'aide de pièces p_B et terminer par p_B^{end} . On a finalement ainsi recouvert exactement le rectangle $[0, K.(k+3)[\times [0, K.(k+2)[$. On obtient aisément un carré à partir de ce rectangle (carré de côté le produit des deux côtés du rectangle).

Réciproquement, supposons que le calcul de M sur le mot vide ne termine pas, et montrons qu'il n'existe pas de pavage d'un carré de côté n . On montre que tout pavage possède sur

son bord supérieur un créneau correspondant à l'état courant. En effet, pour commencer le pavage, on doit placer l'état q_0 (seule la pièce $p_{q_0}^{ini}$ peut être placée en $(0, 0)$) et par la suite, comme toutes les pièces que l'on peut superposer sont de largeur $K, 2K$ ou $3K$, on doit placer les créneaux haut et bas face à face. Or, si le calcul est infini, on ne passe jamais par un état final, et on doit donc toujours ajouter un polyomino correspondant à une règle, or ceux-ci possèdent toujours un créneau supérieur associé à un état.

Ceci conclut la preuve de la proposition 2. \square

Question 3.

On va réduire le problème de correspondance de Post :

Donnée : Deux suites finies (u_1, \dots, u_n) et (v_1, \dots, v_n) de Σ^* .

Question : Est-ce qu'il existe une séquence d'indices i_1, \dots, i_k dans $[1, n]$ telle que $u_{i_1} \dots u_{i_k} = v_{i_1} \dots v_{i_k}$?

Il est possible de montrer que le problème précédent, dans lequel on impose $|\Sigma| = 2$, est également indécidable. Nous nous plaçons dans ce cas pour simplifier la preuve (la construction est en fait analogue si $|\Sigma| > 2$).

Fixons donc deux suites (u_1, \dots, u_n) et (v_1, \dots, v_n) de $\{a, b\}^*$. On considère le cadre défini dans l'énoncé ($k = 4$, alphabet A), et on introduit les notations suivantes :

- $\forall u \in \Sigma^*$, on note u_g (resp. u_d) le mot défini récursivement ainsi : si $u = \varepsilon$ alors $u_g = u_d = \varepsilon$, si $u = u'a$, alors $u_g = u'_g a_g$ et $u_d = u'_d a_d$.
- $\forall i \in [1, n]$, on pose $w_i = (u_i)_g \cdot (v_i)_d$.
- $\bar{x} = \overline{x_g x_d}$ pour $x \in \{a, b\}$

On peut alors définir l'expression rationnelle $e \in A^*$ suivante :

$$e = \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^+ \cdot (\bar{a} + \bar{b})^*$$

Nous allons montrer l'équivalence suivante :

$$\exists w \in \llbracket e \rrbracket \mid w \rightarrow \emptyset \iff \text{PCP a une solution pour les suites } (u_i), (v_i)$$

\Leftarrow Supposons qu'il existe une solution i_1, \dots, i_k au problème de Post. Notons $a_1 \dots a_m = u_{i_1} \dots u_{i_k}$ le mot associé à cette solution. Définissons l'élément $w = w_{i_1} \dots w_{i_k} \bar{a}_m \dots \bar{a}_1 \in \llbracket e \rrbracket$, et vérifions que cet élément convient.

Commençons par remarquer que les pièces x_g (resp. x_d) n'occupent que les deux premières colonnes (resp. les deux dernières colonnes). Les lettres \cdot_g et \cdot_d peuvent donc commuter. Comme nous avons considéré une solution au problème de Post, nous avons $u_{i_1} \dots u_{i_k} = v_{i_1} \dots v_{i_k}$, ce qui implique (par commutativité) $w_{i_1} \dots w_{i_k} = (a_1)_g \dots (a_m)_g (a_1)_d \dots (a_m)_d$. On montre facilement par récurrence sur m que ceci implique que le contenu des deux paires de colonnes est identique à l'issue de $w_{i_1} \dots w_{i_k}$. On peut ensuite vérifier que le mot $\bar{a}_m \dots \bar{a}_1$ permet de vider le tetris.

\Rightarrow Réciproquement, supposons qu'il existe $w \in \llbracket e \rrbracket$ vérifiant $w \rightarrow \emptyset$. En observant la forme de e , nous pouvons écrire $w = w_{i_1} \dots w_{i_k} \bar{a}_m \dots \bar{a}_1$. Montrons que la séquence i_1, \dots, i_k est une solution au problème de Post. On commence par énoncer le lemme suivant, dont la preuve procède par récurrence sur m :

Lemme 1 Soit x une configuration du tetris telle que $x.\overline{a_m} \dots \overline{a_1} = \emptyset$. Alors la configuration x est égale à l'empilement $\tau_{i(a_1),0}(p)\tau_{i(a_1)+2,0}(p) \dots \tau_{i(a_m),m-1}(p)\tau_{i(a_m)+2,m-1}(p)$ où $i(a) = 1$, $i(b) = 0$, $p = [0, 1[\times [0, 1[$.

Nous utilisons ensuite la remarque faite précédemment sur la commutativité des pièces placées à gauche et à droite du tetris pour montrer que la séquence $w_{i_1} \dots w_{i_k}$ est équivalente à la séquence $u_g v_d$ avec $u = u_{i_1} \dots u_{i_k}$ et $v = v_{i_1} \dots v_{i_k}$. Le lemme suivant permet de conclure :

Lemme 2 Soient deux mots $u, v \in \Sigma^*$ tels que la configuration obtenue après le tirage de $u_g v_d$ est de la forme décrite dans le lemme précédent (i.e. une correspondance entre les blocs des deux colonnes), alors on a $u = v$.

La preuve de ce lemme consiste à montrer que l'on doit avoir $|u| = |v|$, puis procède par récurrence sur $|u|$.

On obtient finalement que les deux séquences $u_{i_1} \dots u_{i_k}$ et $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ sont égales, ce qu'il fallait démontrer.

Ceci conclut la preuve de correction de la réduction. □

On peut donc finalement conclure à l'indécidabilité du problème de tetris considéré.