Devoir Maison: à rendre au plus tard le 8 novembre 2018

Dans la suite, Σ est un alphabet fini. Un *système de réécriture* est un ensemble fini de paires de mots $(g_i, d_i) \in (\Sigma^*)^2, 1 \leq i \leq n$. On note ces paires sous la forme $g_i \to d_i$.

Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$ et un système de réécriture $\mathcal{R}$, w *se réécrit* en x si w, x se factorisent en $w = w_1 \cdot g \cdot w_2$, $x = w_1 \cdot d \cdot w_2$ où $g \to d \in \mathcal{R}$. On note $w \to_{\mathcal{R}} x$ lorsque w se réécrit en x en utilisant $\mathcal{R}$.

Un système de réécriture $\mathcal{R}$ *termine* si, pour tout mot w, il n'existe pas de suite infinie $w \to_{\mathcal{R}} w_1 \cdots \to_{\mathcal{R}} w_n \to_{\mathcal{R}} \cdots$.

Un système de réécriture $\mathcal{R}$ *préserve les longueurs* si, pour toute paire $g_i \to d_i$ de $\mathcal{R}$, la longueur de g_i est la même que celle de d_i.

L'objet du problème est de montrer que la terminaison des systèmes de réécriture qui préservent les longueurs est indécidable.

Partie 1: arrêt des systèmes de réécriture

Montrer que les problèmes suivants sont indécidables:

1. **Donnée:** un système de réécriture $\mathcal{R}$ et un mot w

   Question: il existe une suite infinie de réécritures $w \to_{\mathcal{R}} w_1 \to_{\mathcal{R}} w_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$

2. **Donnée:** un système de réécriture $\mathcal{R}$ et deux mots w_1, w_2

   Question: il existe une suite de réécritures $w_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots \to_{\mathcal{R}} w_2$

3. Pour un certain système de réécriture $\mathcal{R}_0$ à préciser,

   Donnée: un mot w

   Question: il existe une suite infinie de réécritures $w \to_{\mathcal{R}_0} w_1 \to_{\mathcal{R}_0} w_2 \to_{\mathcal{R}_0} \cdots$

Partie 2: arrêt des machines de Turing à partir d'une configuration arbitraire

On s'intéresse ici au problème suivant:

Donnée: une machine de Turing M

Question: pour toute configuration γ de M, il n'y a pas de séquence infinie $\gamma \vdash_M \cdots$

Nous allons montrer que ce problème est indécidable. La difficulté vient du fait que γ est ici une configuration arbitraire, pas nécessairement accessible à partir d'une configuration initiale. Il se pourrait donc que M s'arrête sur toute entrée, mais boucle à partir d'une configuration bien choisie.

Nous allons en fait prouver un résultat plus fort, en prenant en entrée un automate linéairement borné, c'est à dire une machine de Turing qui, quand elle lit un blanc, s'arrête, ou écrit un blanc et se déplace à gauche.

1. Soient $u_1, \ldots, u_n \in A^*$. Montrer qu'on peut construire un automate linéairement borné $M_{u_1,\ldots,u_n}$ sur un alphabet contenant $A \cup \{1, \cdots, n\}$ tel que:

   (a) pour toute configuration γ, il n'y a pas de calcul infini de $M_{u_1,\ldots,u_n}$ à partir de γ
   (b) $M_{u_1,\ldots,u_n}$ accepte le langage $\{i_k \cdots i_1 \cdot w \mid k \in \mathbb{N}, u_{i_1} \cdots u_{i_k} = w\}$
   (c) Quand $M_{u_1,\ldots,u_n}$ accepte, le ruban contient le mot de départ et la tête de lecture est en début de ruban.

2. Étant donné $\theta = u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ une séquence de $2n$ mots de A^*, montrer qu'on peut construire un automate linéairement borné M_θ tel que:
   (a) À partir d'une configuration initiale $(q_0, \epsilon, \$w\#)$, M_θ ne s'arrête pas si et seulement si il existe $i_1, \ldots, i_k$ ($k \geq 1$) tels que $x = u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$,et $w = i_k \cdots i_1 \cdot x$. De plus, si M_θ ne s'arrête pas, elle repasse infiniment souvent par la configuration initiale
   (b) Si γ est une configuration arbitraire de M_θ, tout calcul de M_θ à partir de γ ou bien est fini, ou bien passe par une configuration initiale.
   (c) M_θ s'arrête si elle lit un blanc.

3. En déduire l'indécidabilité du problème de l'arrêt à partir d'une configuratin arbitraire, pour les automates linéairement bornés.

Partie 3: terminaison des systèmes de réécriture préservant la longueur

Dans cette partie, on suppose que toutes les paires $g \to d$ de $\mathcal{R}$ sont telles que $|g| = |d|$: la longueur de g est la même que celle de d. Il en résulte que la longueur est invariante par toute séquence de réécritures.

1. Montrer que les problèmes 1 et 2 de la partie 1 sont décidables pour cette classe de systèmes de réécriture.

2. On considère deux copies $\overleftarrow{\Sigma}$ et $\overrightarrow{\Sigma}$ de Σ, copies dans lesquelles les lettres sont surmontées d'une flèche gauche ou droite.
   (a) Σ et Q sont deux alphabets finis disjoints. Montrer que tout $w \in (\overleftarrow{\Sigma} \cup \overrightarrow{\Sigma} \cup Q)^* \setminus ((\overleftarrow{\Sigma} \cup Q)^* \cdot (\overrightarrow{\Sigma} \cup Q)^*)$ peut sécrire de manière unique sous la forme
   $$w = w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$$
   où $n > 1$, $w_1 \in (Q \cup \overleftarrow{\Sigma})^* \cdot (Q \cup \overrightarrow{\Sigma})^* \cdot \overleftarrow{\Sigma}$, $w_n \in (Q \cup \overleftarrow{\Sigma})^+ \cdot (Q \cup \overrightarrow{\Sigma})^*$ et, si $1 < i < n$, $w_i \in (Q \cup \overleftarrow{\Sigma})^+ \cdot (Q \cup \overrightarrow{\Sigma})^* \cdot \overleftarrow{\Sigma}$.
   (b) Soit θ une suite de $2n$ mots et M_θ la machine de la question 2.2. On considère le système de réécriture $\mathcal{R}_\theta$ suivant, sur l'alphabet $\overleftarrow{\Sigma_\theta} \cup Q \cup \overrightarrow{\Sigma_\theta}$:
   $$\left\{ \begin{array}{rcll} q_1\overrightarrow{a_1} & \to & \overleftarrow{a_2}q_2 & \text{Si } \delta_\theta(q_1, a_1) = (q_2, a_2, \rightarrow) \\ \overleftarrow{b}\, q_1\overrightarrow{a_1} & \to & q_2\, \overrightarrow{b}\, \overrightarrow{a_2} & \text{Si } \delta_\theta(q_1, a_1) = (q_2, a_2, \leftarrow) \\ q_1\overrightarrow{a_1} & \to & q_2\overrightarrow{a_2} & \text{Si } \delta_\theta(q_1, a_1) = (q_2, a_2, \downarrow) \end{array} \right.$$
   Montrer qu'il existe une suite infinie $w \to_{\mathcal{R}_\theta} w_1 \cdots \to_{\mathcal{R}_\theta} w_n \to_{\mathcal{R}_\theta} \cdots$ si et seulement si il existe une configuration à partir de laquelle M_θ ne s'arrête pas.

(c) En déduire que le problème:

Donnée: un système de réécriture $\mathcal{R}$ qui préserve les longueurs

Question: existe-t-il une suite infinie $w \to_{\mathcal{R}} w_1 \cdots \to_{\mathcal{R}} w_n \to_{\mathcal{R}} \cdots$

est indécidable.