Chapitre 7

Fonctions récursives

L'objectif de cette partie est d'abord de voir un autre modèle de calcul que les machines de Turing et de montrer qu'il a le même pouvoir expressif que les machines de Turing (donc d'apporter un témoin à la thèse de Church). L'autre objectif est de montrer les théorèmes d'incomplétudes dus à Gödel.

7.1 Fonctions récursives primitives

f désignera une fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$. Les fonctions totales sont aussi des *applications.* $f(n_1, \ldots, n_k) = \perp$ si f n'est pas définie en $n_1, \ldots, n_k$.

Les *fonctions initiales* sont

— les projections $P_k^i : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$. $P_k^i(n_1, \ldots, n_k) = n_i$

— le successeur $S(n) = n + 1$

— la fonction nulle $Z(n) = 0$

— la fonction constante 0 (à 0 arguments).

Un ensemble d'applications F est *fermé par composition* si, pour toutes fonction $\xi : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbb{N}^n \mapsto \mathbb{N}$, la fonction $\phi : \mathbb{N}^n \mapsto \mathbb{N}$ définie par $\phi(\vec{n}) = \xi(\psi_1(\vec{n}), \ldots, \psi_m(\vec{n}))$ est dans F. On note $\mathsf{Comp}_m(\xi, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ la fonction ϕ ainsi obtenue.

Un ensemble d'applications F est *fermé par récursion primitive* si, pour toutes fonctions $\xi, \psi \in F$, la fonction ϕ définie par récurrence par :

$$\phi(m, \vec{n}) = \begin{cases} \xi(\vec{n}) & \text{si } m = 0 \\ \psi(\phi(m-1, \vec{n}), m-1, \vec{n}) & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

est dans F. On note $\mathsf{Prim}(\xi, \psi)$ la fonction ϕ ainsi obtenue.

Definition 7.1.1 *L'ensemble des* fonctions récursives primitives *est le plus petit ensemble contenant la constante 0, les fonctions initiales, clos par composition et récursion primitive.*

Toutes les fonctions récursives primitives s'obtiennent ainsi à partir de fonctions de base et des opérations Prim et Comp_n.

Exemple 7.1.1 $f(n, m) = n+m$ est primitive récursive : $f = \mathsf{Prim}(P_1^1, \mathsf{Comp}_1(S, P_3^1))$.

$g(n, m) = n * n$ est primitive récursive : $g = \mathsf{Prim}(Z, \mathsf{Comp}_2(+, P_3^1, P_3^3))$

Exercice 175
Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives (les prédicats sont vus comme des fonctions à valeur dans $\{0, 1\}$, les fonctions Booléennes traitent les entiers non nuls comme 1).

1. la factorielle
2. le test d'égalité
3. Les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg$.

Exercice 176
F est *clos par maximisation bornée* si, pour toutes fonctions $\xi, \psi \in F$ telles que

$$\forall \vec{n}, \exists m \leq \psi(\vec{n}). \xi(\vec{n}, m) = 0$$

la fonction ϕ définie par :

$$\phi(\vec{n}) = \max_{m \leq \psi(\vec{n})} (\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

est dans F.

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est fermé par maximisation bornée.

Exercice 177
Montrer que, comme dans l'exercice précédent, l'ensemble des fonctions récursives primitives est clos par minimisation bornée.

Exercice 178 (4)
Montrer que la fonction qui, à un entier n associe le plus petit nombre premier plus grand que n est récursive primitive.

Exercice 179
Montrer qu'il existe une fonction $J : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, et deux fonctions $K, L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

1. J, K, L sont récursives primitives
2. J est une bijection
3. pour tous x, y, $K(J(x, y)) = x$ et $L(J(x, y)) = y$.

L'exercice suivant montre une caractérisation important des fonctions récursives primitives : ce sont les fonctions que l'on peut définir exclusivement avec des boucles FOR. C'est aussi ce que dit l'exercice sur ma minimisation bornée, d'une autre façon.

Exercice 180 (5)
Si h est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on appelle *itération de h* la fonction $f(n, x)$ définie par :

$$f(n, x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ h(f(n-1, x)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la plus petite classe de fonctions sur les entiers qui contient les fonctions de base, les fonctions J, K, L et qui est close par itération et composition, coïncide avec l'ensemble des fonctions récursives primitives.

Exercice 181 (5)
Montrer que la fonction suivante, définie par récurrence, est récursive primitive.

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \\ f(n+2) &= f(n+1)+f(n) \qquad \text{Si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Hiérarchie de Grzegorczyk

On définit par récurrence sur n la suite de fonctions primitives récursives comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_0(m) &= m+1 \\ \psi_{n+1}(0) &= \psi_n(1) \\ \psi_{n+1}(m+1) &= \psi_n(\psi_{n+1}(m)) \end{aligned}$$

On montre, par récurrence sur n que :

Lemme 7.1.1 *Pour tout n, ψ_n est une fonction récursive primitive.*

Par récurrence sur m, on montre successivement les résultats suivants pour les premières fonctions de la hiérarchie :

$\psi_1(m) = m+2$

$\psi_2(m) = 2m+3$

$\psi_3(m) = 2^{m+3} - 3$

$$\psi_4(m) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\} m+3 \quad -3$$

Lemme 7.1.2 *1. Pour tous n, m, $\psi_n(m) \geq 1+m$*

2. Les fonctions ψ_k sont strictement croissantes pour tout k

3. Pour tous n, m, k, $\psi_n(m) + k \leq \psi_{n+k}(m)$

Preuve:

1. Par récurrence sur (n, m) (ordonnés lexicographiquement) : $\psi_0(m) = m+1$, ce qui montre la propriété dans le cas de base. $\psi_{n+1}(0) = \psi_n(1) \geq n+1 \geq 1$ par hypothèse de récurrence. $\psi_{n+1}(m+1) = \psi_n(\psi_{n+1}(m)) \geq \psi_{n+1}(m) + 1$ par hypothèse de récurrence. Et $\psi_{n+1}(m) \geq m+1$ (par H.R.) donc $\psi_{n+1}(m+1) \geq m+2$.
2. Par récurrence sur k on montre que, pour tout m, $\psi_k(m+1) > \psi_k(m)$: si $k = 0$ on a bien $m+2 > m+1$. $\psi_{k+1}(m+1) = \psi_k(\psi_{k+1}(m)) \geq \psi_{k+1}(m)+1$ par le premier point du lemme. Donc $\psi_{k+1}(m+1) > \psi_{k+1}(m)$.
3. On montre, par récurrence sur (n, m), que $\psi_{n+1}(m) \geq \psi_n(m) + 1$. Si $n = 0$, $\psi_{n+1}(m) = m+2 \geq \psi_0(m) + 1$. $\psi_{n+2}(0) = \psi_{n+1}(1) \geq \psi_n(1) + 1$ (par hypothèse de récurrence). Or $\psi_n(1) = \psi_{n+1}(0)$. Donc $\psi_{n+2}(0) \geq \psi_{n+1}(0) + 1$.

$\psi_{n+2}(m+1) = \psi_{n+1}(\psi_{n+2}(m)) \geq \psi_{n+1}(\psi_{n+1}(m)+1)$ (par hypothèse de récurrence et par croissance de ψ_{n+1}.) $\psi_{n+1}(\psi_{n+1}(m)+1) \geq \psi_n(\psi_{n+1}(m)+1)+1$ (par hypothèse de récurrence), et $\psi_n(\psi_{n+1}(m)+1)+1 \geq \psi_n(\psi_{n+1}(m))+1 = \psi_{n+1}(m+1)+1$.

Lemme 7.1.3 *Pour tous k, m, n, $\psi_k(\psi_m(n)) \leq \psi_{2+\max(k,m)}(n)$.*

Preuve:
On utilise les résultats de l'exercice 7.1.2 sans mention. Soit $M = \max(k, m)$.

$$\begin{array}{rcll} \psi_k(\psi_m(n)) & \leq & \psi_M(\psi_{M+1}(n)) & \\ & \leq & \psi_{M+1}(n+1) & \\ & \leq & \psi_{M+1}(\psi_1(n-1)) & \text{Si } n > 0 \\ & \leq & \psi_{M+1}(\psi_{M+2}(n-1)) & \\ & \leq & \psi_{M+2}(n) & \end{array}$$

et, si $n = 0$, $\psi_{M+1}(n+1) \leq \psi_{M+2}(0)$ et on a encore l'inégalité.

Proposition 7.1.1 *Pour toute fonction récursive primitive à un argument ξ, il existe une fonction de la hiérarchie de Grzegorczyk ψ_n telle que*

$$\forall m.\ \xi(m) \leq \psi_n(m)$$

Preuve:
On prouve par récurrence sur le nombre d'opérations utilisées dans la construction des fonctions primitives récursives que, si ϕ est primitive récursive, alors il existe un k_ϕ tel que $\phi(\vec{n}) \leq \psi_{k_\phi}(\max \vec{n})$.

— C'est vrai pour les fonctions initiales : $P_k^i(\vec{n}) \leq \psi_0(\max \vec{n})$, $S(n) \leq \psi_0(n)$, $Z(n) \leq \psi_0(n)$.

— Si ϕ est obtenue par composition de $\xi, \phi_1, \ldots, \phi_m$, il suffit de choisir

$$k_\phi = 2 + \max(k_\xi, k_{\phi_1}, \ldots, k_{\phi_n}),$$

en utilisant l'exercice 7.1.2.

— Si ϕ est obtenue par récursion primitive :

$$\phi(m, \vec{n}) = \begin{cases} \xi(\vec{n}) & \text{Si } m = 0 \\ \psi(\phi(m-1, \vec{n}), m-1, \vec{n}) & \text{Si } m > 0 \end{cases}$$

On montre par récurrence sur m que $\phi(m, \vec{n}) \leq \psi_{k_\psi}^m(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n})))$ Si $m = 0$, alors $\phi(0, \vec{n}) = \xi(\vec{n}) \leq \psi_{k_\xi}(\max(\vec{n}))$ par hypothèse de récurrence. Si $m > 0$, par hypothèse de récurrence,

$$\phi(m-1, \vec{n}) \leq \psi_{k_\psi}^{m-1}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n}))).$$

Par croissance de ψ_{k_ψ} et comme $\psi_{k_\psi}^m(n) \geq n + m$, on a aussi

$$\begin{array}{rcl} \phi(m, \vec{n}) & \leq & \psi_{k_\psi}(\max(\psi_{k_\psi}^{m-1}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n}))), m-1, \vec{n})) \\ & \leq & \psi_{k_\psi}(\psi_{k_\psi}^{m-1}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n})))) \end{array}$$

Par ailleurs, $\psi_k^m(n) \leq \psi_{k+1}(n+m)$ (par récurrence sur m), donc

$$\phi(m, \vec{n}) \leq \psi_{1+k_\psi}(m + \psi_{k_\xi}(\max(\vec{n})))$$

Il suffit d'utiliser alors le résultat sur la composition.

La *fonction d'Ackermann* est la fonction à deux arguments $A(n, m) = \psi_n(m)$.

Théorème 7.1.1 *La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.*

Preuve:
Si cette fonction était récursive primitive, d'après la proposition 7.1.1, il existerait un entier k tel que, pour tout n, $A(n, n) \leq \psi_k(n)$. Mais en choisissant $n = k + 1$, on obtient $\psi_{k+1}(k+1) \leq \psi_k(k+1)$, ce qui contredit le résultat de l'exercice 7.1.2.

Exercice 182
Le shéma de *récursion mutuelle* à partir des fonctions f, g, h, k sur les entiers définit par récurrence les fonctions α, β sur les entiers par :

$$\begin{cases} \alpha(0, \vec{x}) &= f(\vec{x}) \\ \alpha(n+1, \vec{x}) &= g(\beta(n, \vec{x}), n, \vec{x}) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta(0, \vec{x}) &= h(\vec{x}) \\ \beta(n+1, \vec{x}) &= k(\alpha(n, \vec{x}), n, \vec{x}) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour toutes fonctions récursives primitives f, g, h, la fonction définie par récurrence par :

$$\begin{cases} \alpha(0, \vec{x}) &= f(\vec{x}) \\ \alpha(1, \vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ \alpha(n+2, \vec{x}) &= h(\alpha(n, \vec{x}), n, \vec{x}) \end{cases}$$

   est récursive primitive.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est clos par récursion mutuelle.

Exercice 183
Montrer qu'il existe une fonction calculable et injective N de l'ensemble des fonctions récursives primitives dans les entiers telle que les prédicats :
- $R_2(n, m) = 1$ ssi il existe une fonction primitive récursive à m arguments g telle que $n = N(g)$
- $R_1(n) = 1$ ssi il existe un entier m tel que $R_2(n, m) = 1$

sont récursifs primitifs.

Exercice 184
Soit $p_0, p_1, \ldots, p_n, ...$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

1. La fonction $\mathsf{PrimeS}(n) = p_n$
2. La fonction Log qui, à i, n associe l'exposant de p_i dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Exercice 185
Soit g une fonction récursive primitive et Q un prédicat récursif primitif. Montrer que le prédicat défini par :

$$P(\vec{n}) = \ \forall i \leq g(\vec{n}).\ Q(\vec{n}, i)$$

est primitif récursif

Exercice 186
Montrer qu'il existe une fonction C calculable et injective des suites finies d'entiers dans les entiers et une fonction récursive primitive D tels que :

$$D(i,k) = \begin{cases} u_i & \text{Si } \exists n \geq i,\ C(u_0, \ldots, u_n) = k \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

(En particulier D doit bien être une fonction : son résultat doit être défini de manière unique).

7.2 Fonctions récursives totales

Un ensemble de fonctions F est *fermé par minimisation* si, pour toute application $\xi \in F$ telle que $\forall \vec{n} \exists m. \xi(\vec{n}, m) = 0$, la fonction ϕ définie par

$$\phi(\vec{n}) = \min_m(\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

est dans F.

Definition 7.2.1 *L'ensemble des* fonctions récursives (totales) *est le plus petit ensemble de fonctions qui contient les fonctions initiales et qui est fermé par composition, récursion primitive, et minimisation.*

Théorème 7.2.1 *La fonction d'Ackermann est récursive totale.*

Preuve:
L'idée est de considérer une approximation du graphe de A : la fonction A' aura 3 arguments, le troisième codant le graphe de la fonction d'Ackermann dans un parallélipipède borné ; toute portion bornée du graphe de A est en effet une suite finite d'entiers qui peut être représentée par un entier.

On considère la fonction $A'(n, m, k)$ définie par :

$$A'(n, m, k) = \begin{cases} A(n, m) \text{ Si } A(n, m) \leq k \\ 0 \text{ Sinon} \end{cases}$$

Nous allons montrer que $A'(n, m, k)$ est primitive récursive. Pour simplifier la présentation, en utilisant les exercices 180, 186, on s'autorise les boucles for et l'utilisation de tableaux pour mémoriser les résultats intermédiaires (les opérations sur les tableaux codés par des entiers sont bien récursives primitives, gâce à l'exercice 186).

On suppose $k \geq 2$ (pour $k = 0$ on définit $A'(n, m, k) = 0$ et pour $k = 1$ on définit $A'(n, m, k) = 1$ si $n = m = 0$ et 0 sinon).

```
for i :=0 to n do
   for j :=0 to k do
      T[i,j] :=0
for i :=0 to n do
   for j :=0 to k-1 do
      if i=0
         then T[0,j] := j+1
      if j=0
         then T[i,0] := T[i-1,1]
      if i>0 and j >0 and k-1 ≥ T[i,j-1] ≥ 1
         then T[i,j] := T[i-1,T[i,j-1]]
```

Nous prétendons que, à l'issue de l'éxécution, si $T[n, m] \leq k$, alors $T[n, m] = A'(n, m, k)$ et donc que A' est récursive primitive.

Pour le prouver, on considère le plus petit ensemble S de paires d'entiers tel que $(n, m) \in S$ et,

— si $(i+1,0) \in S$ alors $(i,1) \in S$
— si $(i+1,j+1) \in S$ et $A(i+1,j) \leq k-1$, alors $(i+1,j) \in S$ et $(i, A(i+1,j)) \in S$

On montre, par récurrence sur la paire (i,j) que, à l'issue de l'execution du programme, pour tous $(i,j) \in S$, $T[i,j] = A'(i,j,k)$.

— Si $(0,j) \in S$, alors $j \leq k-1$ (par minimalité de S) et donc $T[0,j] = j+1 = A(0,j) = A'(0,j,k)$
— Si $(i+1,0) \in S$, alors $(i,1) \in S$ et, par hypothèse de récurrence, $T[i,1] = A'(i,1,k)$. Si $k \geq A(i,1)$, alors $T[i+1,0] = T[i,1] = A(i,1) = A(i+1,0) = A'(i+1,0,k)$. Sinon, $T[i,1] = 0 = T[i+1,0] = A'(i+1,0,k)$
— Si $(i+1,j+1) \in S$ alors,
  — ou bien $A(i+1,j) \geq k$ et, dans ce cas, $A(i+1,j+1) > k$ et donc $A'(i+1,j+1,k) = 0$. Par ailleurs, $T[i+1,j+1] = 0$ et donc $A'(i+1,j+1,k) = T[i+1,j+1]$
  — ou bien $A(i+1,j) \leq k-1$ et dans ce cas $(i, A(i+1,j)) \in S$ et donc, par hypothèse de récurrence, $A'(i, A(i+1,j), k) = T[i, A(i+1,j)]$. Par ailleurs, $A'(i+1,j,k) = A(i+1,j) = T[i+1,j]$ par hypothèse de récurrence. Donc $T[i+1,j+1] = T[i, T[i+1,j]] = A'(i, A(i+1,j), k)$. Donc $T[i+1,j+1] = A(i, A(i+1,j), k)$ si $A(i, A(i+1,j)) \leq k$ et $T[i+1,j+1] = 0$ sinon. Dans tous les cas $T[i+1,j+1] = A'(i+1,j+1,k)$.

On remarque enfin que

$$A(n,m) = \min_k (A'(n,m,k) \neq 0)$$

Exercice 187
Montrer qu'il existe une fonction non récursive primitive dont le graphe est récursif primitif. (Le graphe de f est l'ensemble des paires $(n, f(n))$.

Exercice 188
Montrer qu'il existe une fonction calculable R de l'ensemble des fonctions récursives primitives dans les entiers et une fonction récursive totale U telles que, pour toute fonction récursive primitive f à un argument et tout entier i :

$$U(R(f), i) = f(i)$$