Chapitre 2

Calcul propositionnel

C'est le formalisme logique le plus simple. Mais il est fondamental pour plusieurs raisons :

- Bien sûr, il sert d'introduction pédagogique.
- Plusieurs résultats en calcul des prédicats, en logique temporelle etc... s'obtiennent par "relèvement" de résultats du calcul propositionel.
- En fait, en pratique, il est très utilisé à cause de sa simplicité et de l'algorithmique relativement efficace qu'on peut mettre en oeuvre.

Il y a aussi plusieurs formalismes pour le calcul propositionnel. On commencera par le plus standard "à la Hilbert", puis on s'interessera au calcul des séquents, à la déduction naturelle (dans les deux cas, dans le cas classique et dans le cas intuitioniste), ainsi qu'à d'autres représentations comme les anneaux Booléens.

2.1 Syntaxe

La définition d'une logique passe par trois étapes : la définition des énoncés (syntaxe), la définition des modèles (sémantique) et enfin, la théorie de la preuve.

On suppose ici donné un ensemble de *variables propositionnelles* $\mathcal{P}$.

Definition 2.1.1 *L'ensemble $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ des formules du calcul propositionel est le plus petit ensemble tel que :*

- *les constantes $\top, \bot$ sont dans $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$*
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$
- *Si $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ alors $\neg\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$*
- *Si $\phi, \psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, alors $\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \phi \to \psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$*

Dans cette définition, $\neg, \vee, \wedge, \to$ sont les *connecteurs logiques*.

On définit aussi les *formules de taille n* par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- Si $\phi \in \mathcal{P} \cup \{\bot, \top\}$, alors ϕ est une formule de taille 1
- Si ϕ est une formule de taille n et ψ est une formule de taille m, alors $\neg\phi$ est une formule de taille $n+1$ et $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ sont des formules de taille $n+m+1$.

Soit $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})_n$ l'ensemble des formules de taille n ainsi défini.

Proposition 2.1.1 $\mathcal{F}_0(\mathcal{P}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_0(\mathcal{P})_n$.

Exercice 2 (3)
Prouver la proposition précédente.

Cette proposition permet des définitions par récurrence sur la taille de la formule.

Exemple 2.1.1 Soit

$$\mathcal{P} = \{\texttt{La\_boîte\_1\_contient\_une\_bombe}, \ldots, \texttt{La\_boîte\_n\_contient\_une\_bombe}\}$$

un ensemble de n variables propositionnelles. Voici des exemples de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$:

$$\texttt{La\_boîte\_1\_contient\_une\_bombe} \wedge \texttt{La\_boîte\_2\_contient\_une\_bombe}$$
$$\texttt{La\_boîte\_1\_contient\_une\_bombe} \wedge \neg\texttt{La\_boîte\_1\_contient\_une\_bombe}$$

Exemple 2.1.2 Soit $\mathcal{P} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sont des formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$:

$$A_2 \wedge A_2 \wedge (A_2 \vee \neg A_2)$$
$$A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2)$$

N'est pas une formule :

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \vee \ldots \quad \text{(disjonction infinie)}$$

Remarques :

1. Le parenthésage doit permettre de désambigüer. Habituellement la négation a priorité sur les autres connecteurs.
2. Le cas des disjonctions infinies sera (entre autres) étudié ultérieurement ; il s'agit d'une logique plus expressive que $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$.

2.2 Sémantique

Une *interprétation* est une application I de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$.

Definition 2.2.1 *Une interprétation I* satisfait *une formule $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, ce que l'on note $I \models \phi$ ($\models \subseteq 2^{\mathcal{P}} \times \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$), si*

- $\phi = \top$ *ou bien*
- $\phi \in \mathcal{P}$ *et* $I(\phi) = 1$ *ou bien*
- $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ *et* ($I \models \phi_1$ et $I \models \phi_2$) *ou bien*
- $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ *et* ($I \models \phi_1$ ou $I \models \phi_2$) *ou bien*
- $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ *et* (si $I \models \phi_1$ alors $I \models \phi_2$) *ou bien*
- $\phi = \neg\psi$ *et* $I \not\models \psi$

Definition 2.2.2 *Une interprétation I satisfait un ensemble de formules S (noté $I \models S$) si I satisfait chacune des formules de S.*

Un modèle *d'un ensemble S de formules est une interprétation I telle que $I \models S$.*

Une formule ϕ (resp. un ensemble de formules S') est une conséquence logique *de ψ (resp. d'un ensemble de formules S) si tout modèle de ψ (resp. tout modèle de S) est un modèle de ϕ (resp. est un modèle de l'une des formules de S'). On note alors $\psi \models \phi$ (resp. $S \models S'$).*

Une formule est satisfaisable *si elle a au moins un modèle.*

Une formule ϕ est valide *si toute interprétation est un modèle de ϕ.*

On dit que deux formules sont logiquement équivalentes *lorsqu'elles ont les mêmes modèles.*

Exercice 3 (1)
Donner l'ensemble de tous les modèles de la formule $\phi \stackrel{\text{def}}{=} ((P \to Q) \vee (\neg P \to \neg Q)) \wedge (Q \wedge R \to \neg P)$ lorsque $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$.

Exercice 4 (1)
Montrer que :

1. ϕ est insatisfaisable si et seulement si $\neg\phi$ est valide
2. $\phi \models \psi$ si et seulement si $\phi \to \psi$ est valide.

Exercice 5 (4)
Montrer que, si $\mathcal{P}$ est fini, alors dans tout ensemble de formules fini de cardinal assez grand (on précisera cette borne), il existe deux formules logiquement équivalentes (i.e. qui ont même ensembles de modèles).

Exercice 6 (5)

1. Montrer que, lorsque $\mathcal{P}$ est fini, pour tout ensemble d'interprétations S, il existe un ensemble de formules E tel que S est exactement l'ensemble des modèles de E.
2. Montrer que ce résultat est faux lorsque $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 7 (6)
Donner un exemple d'un ensemble de formules dont l'ensemble des modèles est infini et dénombrable.

Exercice 8 (5)
(théorème d'interpolation) Soient ϕ, ψ telles que $\phi \models \psi$. Montrer que il existe une formule θ telle que $\phi \models \theta$, $\theta \models \psi$ et les variables propositionnelles apparaissant dans θ, apparaissent aussi dans ϕ et dans ψ.

Exercice 9 (6)
(théorème de compacité) $\{0, 1\}$ est muni de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble est un ouvert. $\{0, 1\}$ muni de cette topologie est ainsi un compact. L'ensemble $\{0, 1\}^A$ des interprétations des formules propositionnelles construites sur A est alors muni de la topologie produit : les ouverts sont les unions (arbitraires) de produits $\Pi_{a \in A} \mathcal{O}_a$ où l'ensemble des $a \in A$ tels que $\mathcal{O}_a \neq \{0, 1\}$ est fini.

Tout produit de compacts étant compact (ce qui est admis), l'espace $\mathcal{I}$ de toutes les interprétations est ainsi un compact.

1. Montrer que, pour toute formule ϕ, l'ensemble des interprétations qui satisfont ϕ est un fermé de $\mathcal{I}$.
2. En déduire que tout ensemble de formules insatisfaisable contient un sous-ensemble fini insatisfaisable.

Les connecteurs logiques ne sont pas tous indépendants. Par exemple, pour toutes formules ϕ et ψ, $\phi \to \psi$ est logiquement équivalent à $\neg\phi \vee \psi$.

Exercice 10 (1)
Le démontrer.

Ainsi, $\to$ est *définissable* à l'aide de $\vee, \wedge, \neg$.

Exercice 11 (2)
Montrer que $\vee, \wedge, \neg$ sont définissables à l'aide du seul connecteur $\to$ et de la constante $\bot$. On dit alors que l'ensemble $\{\to, \bot\}$ est *fonctionnellement complet.*

On peut aussi définir de nouveaux connecteurs logiques, par exemple

$$\phi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$$

ou

$$\phi \oplus \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$$

Exercice 12 (3)
Plus généralement, les connecteurs logiques peuvent être vus comme des fonctions Booléennes. Si F est un ensemble de fonctions Booléennes, on note $A(F)$ l'ensemble de toutes les fonctions Booléennes obtenues à l'aide des fonctions de F et de la composition et des projections (fonctions $\pi_n^i(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$).

Pour tout entier $n \geq 1$ on note d_n (resp. c_n) la fonction Booléenne à n arguments qui renvoie 0 (resp. 1) si et seulement si tous ses arguments valent 0 (resp. 1).

1. Montrer que, pour tous $n, m, k \geq 2$, $A(c_n, f_\neg) = A(d_m, f_\neg)$ contient toutes les fonctions Booléennes à k arguments.
2. Montrer que $f_\neg$ n'est pas dans $A(f_\vee, f_\wedge, f_\to, f_\leftrightarrow)$

Exercice 13 (4)
Donner un connecteur logique binaire qui est, seul, fonctionnellement complet.

Exercice 14 (5)
Montrer que $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet.

Exercice 15 (6)
Un ensemble de formules E est *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

1. Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble fini $E' \subseteq E$ indépendant tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.

2. Montrer que, pour tout ensemble dénombrable E de formules, il existe un ensemble E' de formules tel que E' est indépendant et, pour toute formule $\phi \in E'$, $E \models \phi$, pour toute formule $\psi \in E$, $E' \models \psi$.
3. Montrer qu'il n'est pas toujours possible d'avoir (en plus) $E' \subseteq E$.

Exercice 16 (8)
On considère n coffres, chacun contenant un trésor ou une bombe. Le problème est de déterminer le contenu exact de chacun des coffres. Pour cela, on peut poser par écrit une liste de N questions (formules du calcul propositionnel, les variables propositionelles étant le contenu des coffres). On obtient, une fois la liste complète des questions établies, la réponse (i.e. l'interprétation) aux N questions. Mais il est possible que (au plus) k des N réponses soient incorrectes.

Etant donnés n, k, on s'intéresse au problème de trouver le N minimal, et les questions correspondantes, de manière à déterminer à coup sûr le contenu des coffres.

Donner le N minimal (et les questions correspondantes) dans les cas suivants.

1. $k = 0$ et n quelconque
2. $n = k = 1$
3. $n \leq 5$, $k = 1$
4. $k = 1$ et n quelconque

Prendre soin dans chaque cas de justifier la réponse.

Parmi les théorèmes célèbres (en calcul des prédicats), le théorème de compacité, énoncé ici dans le cas propositionnel, permet de ramener l'insatisfaisabilité à l'insatisfaisabilité finie.

Théorème 2.2.1 (compacité) *Un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est insatisfaisable si et seulement si il contient un sous-ensemble fini de formules insatisfaisable.*

Preuve:
Soit $\geq$ la relation d'ordre sur $\mathcal{P}$ définie par $A_n \geq A_m$ si et seulement si $n \geq m$. Une *interprétation partielle* est une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$ dont le domaine de définition est un ensemble $\{Q \in \mathcal{P} \mid Q < P\}$ pour un certain $P \in \mathcal{P}$. (on notera en indice de l'interprétation partielle le majorant P de son domaine de définition). L'ensemble des interprétations partielles est alors ordonné par prolongement : $I_{P_1} \leq I_{P_2}$ si $P_1 \leq P_2$ et I_{P_2} restreinte aux variables propositionelles inférieures à P_1 coïncide avec I_{P_1}.

On peut représenter graphiquement cet ordre sous forme d'un arbre des interprétations partielles (cf. figure 2.1).

Soit maintenant un ensemble S insatisfaisable. On peut supposer sans perdre de généralité que S ne contient pas deux formules logiquement équivalentes. Si l'ensemble des variables propositionnelles intervenant dans les formules de S est fini, alors S est fini (cf. exercice 5). On peut donc supposer sans perdre de

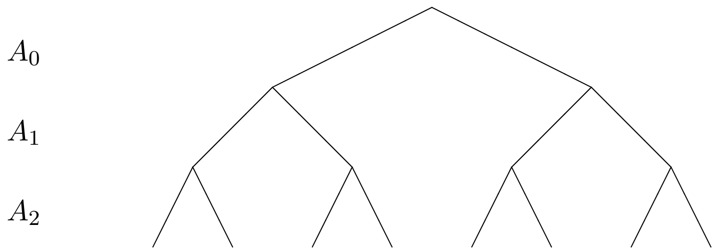

FIGURE 2.1 – arbre des interprétations partielles

généralité que l'ensemble $\mathcal{P}$ est infini et que toute variable de $\mathcal{P}$ apparaît dans au moins une formule de S.

Une interprétation partielle I *falsifie* une formule $\phi \in S$ si les variables de ϕ sont dans le domaine de définition de I et $I \not\models \phi$.

Considérons l'arbre des interprétations partielles qui ne falsifient aucune formule de S. Formellement : soit

$$\mathcal{E} = \{I_P \mid I_P \models S \cap \mathcal{F}(\{Q \in \mathcal{P}, Q \leq P\})\}$$

Si I ne falsifie aucune formule de S et $J \leq I$, alors J ne falsifie aucune formule de S : $I \in \mathcal{E}$ et $J \leq I$ entraine $J \in \mathcal{E}$.

Par l'absurde, supposons que $\mathcal{E}$ est infini. On construit alors par récurrence une suite $I_{A_n} \in \mathcal{E}$, strictement croissante, et telle que $\{J \mid J \geq I_{A_n}\} \cap \mathcal{E}$ est infini. (Autrement dit, on construit un chemin infini dans l'arbre) :

- I_{A_0} est l'interprétation de domaine vide (elle est dans $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est clos par le bas).
- I_{A_n} étant construite, soient $I^j_{A_n}$ les deux prolongements de I_{A_n} à A_n : $Dom(I^j_{A_n}) = \{Q \mid Q \leq A_n\}$ et $I^j_{A_n}(A_n) = j$, pour $j = 0, 1$. $\mathcal{E}_n = \{J \in \mathcal{E}, J \geq I_{A_n}\}$ est infini par hypothèse de récurrence et, de plus,

$$\mathcal{E}_n = \{I_{A_n}\} \cup \{J \in \mathcal{E} \mid J \geq I^0_{A_n}\} \cup \{J \in \mathcal{E} \mid J \geq I^1_{A_n}\}$$

  L'un de ces deux derniers ensembles au moins est donc infini. On pose alors $I_{A_{n+1}} = I^j_{A_n}$ pour j tel que $\{J \in \mathcal{E} \mid J \geq I^j_{A_n}\}$ est infini. On a bien $I_{A_{n+1}} > I_{A_n}$.

Soit alors l'interprétation I définie par : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $I(A_i) = I_{A_{i+1}}(A_i)$. Notons que, par croissance de la suite I_{A_i}, si $j < i$, $I(A_j) = I_{A_{i+1}}(A_j)$. Pour toute formule $\phi \in S$, si i est l'indice maximal d'une variable propositionnelle de ϕ, $I_{A_{i+1}} \models \phi$, et donc $I \models \phi$. Il en résulte que $I \models S$, ce qui contredit l'insatisfaisabiliteé de S.

Il en résulte que l'arbre $\mathcal{E}$ est fini. L'ensemble des domaines des interprétations partielles de $\mathcal{E}$ est donc borné : soit N tel que $\bigcup_{I \in \mathcal{E}} Dom(I) \subseteq \{Q \mid Q < A_N\}$. $S_0 = S \cap \mathcal{F}(\{Q \mid Q \leq A_N\})$ est alors insatisfaisable et c'est un ensemble fini (d'après l'exercice 5 et puisque nous avons supposé que S ne contient pas deux formules logiquement équivalentes). □

Exercice 17 (3)
Montrer qu'un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Exercice 18 (5)
Soit E un ensemble de formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$. On dira que E est *maximal cohérent* si E est satisfaisable et que, pour toute formule ϕ du calcul propositionnel, ou bien $\phi \in E$ ou bien $E \cup \{\phi\}$ est insatisfaisable.

1. Supposant que $\mathcal{P}$ est fini, montrer que tout ensembe de formules E satisfaisable est contenu dans un ensemble maximal cohérent.
2. Montrer que cet ensemble maximal cohérent n'est pas unique : donner (toujours dans le cas où $\mathcal{P}$ est fini) un ensemble E et deux ensembles maximaux cohérents distincts contenant E.
3. Que devient le résultat de la première question lorsque $\mathcal{P}$ est infini dénombrable ?

Exercice 19 (7)
Étant données une famille d'interprétations $(I_\alpha)_{\alpha \in E}$, leur interesection est l'interprétation I telle que $I(P) = 1$ ssi ($I_\alpha(P) = 1$ pour tout $\alpha \in E$).

Soit Σ un ensemble de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. On dit que Σ est *préservé par intersections finies* si, l'intersection de deux modèles de Σ est un modèle de Σ. Σ est *préservé par intersections* si toute intersection de modèles de Σ est un modèle de Σ. Σ est *axiomatisé* par Γ si, pour tout $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, $\Gamma \models \phi$ si et seulement si $\Sigma \models \phi$.

1. Montrer que Σ est préservé par intersections finies si et seulement si Σ est préservé par intersections.
2. Une *clause* est une formule
$$A_1 \vee \ldots \vee A_n$$
dans laquelle les A_i sont des variables propositionnelles (appelés *littéraux positifs*) ou des négations de variables propositionnelles (appelées *littéraux négatifs*). Une *clause de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.
Montrer que Σ est axiomatisable par un ensemble de clauses de Horn si et seulement si Σ est stable par intersections. (On pourra supposer, sans perte de généralité, que Σ est un ensemble de clauses).

Exercice 20 (6)
On suppose ici que $\mathcal{P}$ est dénombrable.

1. Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux ensembles de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ et $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ leurs ensembles respectifs de modèles. Donner un ensemble de formules $\mathcal{E}$ dont $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ est l'ensemble des modèles.
2. Plus généralement, montrer que, si $\mathcal{M}$ est un sous-ensemble fermé de $2^{\mathcal{P}}$ (cf. exercice 9 pour la définition de la topologie), alors il existe un ensemble de formules $\mathcal{E}$ dont $\mathcal{M}$ est l'ensemble des modèles.

$$\begin{array}{rcl}
\phi \to \psi & \Rightarrow & (\neg\phi) \vee \psi \\
\neg\neg\phi & \Rightarrow & \phi \\
\neg(\phi \wedge \psi) & \Rightarrow & (\neg\phi) \vee (\neg\psi) \\
\neg(\phi \vee \psi) & \Rightarrow & (\neg\phi) \wedge (\neg\psi) \\
(\phi \wedge \psi) \vee \theta & \Rightarrow & (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta) \\
\top \vee \phi & \Rightarrow & \top \\
\phi \vee \bot & \Rightarrow & \phi \\
\phi \vee \phi & \Rightarrow & \phi
\end{array}$$

FIGURE 2.2 – Règles de mise en forme clausale

2.3 Forme clausale

On considère les règles de simplification de la figure 2.2.

Dans les règles de la figure 2.2, ϕ, ψ, θ sont des *variables logiques* : elles peuvent être remplacées par n'importe quelle formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. Les règles sont appliquées modulo l'associativité-commutativité de $\wedge, \vee$: si une (instance de) règle s'applique à ϕ et ψ est identique à ϕ modulo l'associativité-commutativité de $\wedge, \vee$, elle s'applique à ψ, avec le même résultat.

De plus, les règles peuvent être appliquées dans n'importe quel contexte. Plus formellement, un *contexte* est une formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P} \cup \{\Box\})$ où $\Box \notin \mathcal{P}$, qui ne comporte qu'une seule occurrence de $\Box$. Si C est un contexte et $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, $C[\phi]$ est la formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ obtenue en repmplaçant $\Box$ dans C par ϕ. La relation $\Rightarrow$ est alors la (plus petite) relation binaire sur $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ qui contient toutes les instances des règles de la figure 2.2 et telle que, pour tout contexte C, si $\phi \Rightarrow \psi$, alors $C[\phi] \Rightarrow C[\psi]$.

Proposition 2.3.1 *Les règles de la figure 2.2 transforment des formules en des formules logiquement équivalentes.*

Proposition 2.3.2 *Les règles de la figure 2.2 se terminent (quel que soit l'ordre dans lequel elles sont appliquées) : il n'existe aucune suite infinie $\phi_n, n \in \mathbb{N}$ de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ telle que, pour tout i, $\phi_i \Rightarrow \phi_{i+1}$.*

Preuve:
On interprète comme suit les formules dans les entiers :
- $f(\bot) = f(\top) \stackrel{\text{def}}{=} 2$
- $f(P) \stackrel{\text{def}}{=} 2$ si P est une variable propositionnelle.
- $f(\phi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(f(\phi), f(\psi))$ où $g_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y + 1$
- $f(\phi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} g_2(f(\phi), f(\psi))$ où $g_2(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \times y$
- $f(\neg\phi) \stackrel{\text{def}}{=} g_3(f(\phi))$ où $g_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^x$
- $f(\phi \to \psi) \stackrel{\text{def}}{=} g_4(f(\phi), f(\psi))$ où $g_4(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{1+x+y}$

L'interprétation des formules est ensuite compatible avec l'associativité-commutativité de $\wedge, \vee$: $f(\phi \wedge \psi) = f(\psi \wedge \phi)$, $f(\psi \vee \phi) = f(\phi \vee \psi)$ et $f(\phi \wedge (\psi \wedge \theta)) = f((\phi \wedge \psi) \wedge \theta)$, $f(\phi \vee (\psi \vee \theta)) = f((\phi \vee \psi) \vee \theta)$. f est donc bien définie,

$$\begin{array}{rcl} \phi \wedge \phi & \to & \phi \\ \phi \wedge \perp & \to & \perp \\ \phi \wedge \top & \to & \phi \end{array}$$

FIGURE 2.3 – Simplification des conjonctions de clauses

indépendemment du représentant choisi, dans la classe d'équivalence modulo associativité et commutativité.

On montre d'abord par récurrence sur ϕ que $f(\phi) \geq 2$.

Ensuite, toutes les fonctions g_i sont strictement croissantes dans leurs deux arguments pour $x, y \geq 2$. Il en résulte que, si $f(\phi) > f(\psi)$, alors $f(C[\phi]) > f(C[\psi])$ pour tout contexte C.

Il suffit ainsi de démontrer que, pour toutes les formules ϕ, ψ, chacune des règles fait décroître f. Pour plus de clarté, on notera $x = f(\phi)$, $y = f(\psi)$, $z = f(\theta)$ dans ce qui suit.

- $f(\phi \to \psi) = 2^{1+x+y}$ et $f(\neg\phi \vee \psi) = 2^x \times y$. Mais, pour $y \geq 0$, $2^y > y$ donc $2^{1+x+y} > 2^x \times y$.
- $f(\neg\neg\phi) = 2^{2^x} > x$
- $f(\neg(\phi \wedge \psi)) = 2^{x+y+1} > f(\neg\phi \vee \neg\psi) = 2^x \times 2^y$
- $f(\neg(\phi \vee \psi)) = 2^{x \times y}$ et $f(\neg\phi \wedge \neg\psi) = 2^x + 2^y + 1$. Or, pour $x, y \geq 2$, $x \times y \geq x + y$, donc $2^{x \times y} \geq 2^x \times 2^y \geq 2^x + 2^y \times (2^x - 1)$. Mais $2^x - 1 > 2$ pour $x \geq 2$, donc $2^{x \times y} > 2^x + 2 \times 2^y > 2^x + 2^y + 1$.
- $f((\phi \wedge \psi) \vee \theta) = f(\theta \vee (\phi \wedge \psi)) = (x + y + 1) \times z$ et $f((\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)) = x \times z + y \times z + 1$ qui est strictement inférieur à $x \times z + y \times z + z$ pour $z \geq 2$.
- Les autre cas sont immédiats.

$\square$

Definition 2.3.1 *Une formule est en* forme normale conjonctive *si elle est irréductible pour les règles de la figure 2.2.*

Definition 2.3.2 *Un* littéral *est une variable propositionnelle ou la négation d'une variable propositionnelle.*

Une clause *est une disjonction de littéraux ou bien* $\perp$.

Proposition 2.3.3 *Toute formule en forme normale conjonctive est une conjonctions de clauses ou bien* $\top$.

Definition 2.3.3 *Une* forme clausale *d'une formule* $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ *est la forme normale par les règles de la figure 2.3 d'une des formes irréductibles de* ϕ *pour les règles de la figure 2.2.*

Une forme clausale est donc $\top$, $\perp$, ou bien une conjonction de clauses distinctes et distinctes de $\top, \perp$. On identifie ainsi souvent (abusivement) une forme clausale à un ensemble de clauses ; la forme clausale est $\top$ correspond à un ensemble vide.

Exercice 21 (3)
Donner un exemple de formule ayant deux formes clausales distinctes.

L'exercice suivant montre que les formes clausales peuvent inévitablement conduire à une croissance exponentielle de la formule.

Exercice 22 (6)
Si $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, on note $\tau(\phi)$ la taille minimale d'une forme clausale de ϕ.

1. Donner un exemple d'une famille de formules ϕ_n telles que $\lim_{n\to+\infty} |\phi_n| = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau(\phi_n)}{\sqrt{2^{|\phi_n|}}} > 0$.
2. Montrer que, pour toute formule ϕ, $\tau(\phi) < |\phi| \times 2^{\frac{|\phi|+5}{2}}$

$$\text{Résolution binaire} \qquad \frac{\neg A \vee C \quad A \vee C'}{C \vee C'}$$

$$\text{Factorisation binaire} \qquad \frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}$$

FIGURE 2.4 – Règle de résolution

2.4 Résolution

Dans cette partie, on ne considère que des formes clausales.

Décider de la satisfaisabilité d'une formule en forme clausale n'est pas (algorithmiquement) facile. C'est un problème NP-complet (voir calculabilité).

Les règles d'inférence de la figure 2.4 ont en prémisse une ou deux clauses et en conclusion une clause. Dans ces règles, C est ou bien une disjonction de littéraux, ou bien la clause vide $\perp$ (on suppose que $C \vee \perp = C$) et L est un littéral.

On note $E \vdash_R C$ lorsque la clause C peut être obtenue à partir de E. par une application d'un nombre quelconque de règles de la figure 2.4. De manière équivalente, $E \vdash C$ s'il existe un arbre dont les noeuds sont étiquetés par des clauses, la racine est étiquetée par C, les étiquettes des feuilles sont dans E et, chaque noeud qui n'est pas une feuille

– ou bien a un seul fils et, dans ce cas, son étiquette est obtenue par factorisation à partir de l'étiquette de son fils
– ou bien a deux fils et, dans ce cas, son étiquette est obtenue par résolution binaire à partir des étiquettes de ses deux fils.

La *taille* d'une preuve est le nombre de noeuds de l'arbre correspondant.

Exemple 2.4.1 Si $E = \{P \vee \neg Q \vee R, P \vee \neg R\}$ alors $E \vdash_R P \vee \neg Q$ et voici un arbre de preuve :

$$\cfrac{\cfrac{P \vee \neg Q \vee R \quad P \vee \neg R}{P \vee P \vee \neg Q}}{P \vee \neg Q}$$

Exercice 23 (2)
Montrer comment les règles de la figure 2.4 permettent de dériver la clause vide $\perp$ de l'ensemble de clauses

$$E = \{P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee Q, \neg P \vee Q\}$$

Exercice 24 (2)
Montrer qu'une même clause peut avoir plusieurs arbres de preuve distincts (à permutation près des fils).

Proposition 2.4.1 *Les règles de la figure 2.4 sont correctes. ($\vdash_R \subseteq \models$).*

Preuve:
Il suffit de montrer que, pour chacune des deux règles, lorsqu'une interprétation satisfait les prémisses, elle satisfait aussi la conclusion, puis de faire une récurrence sur la longueur de la preuve (taille de l'arbre de preuve). Les détails sont laissés en exercice. □

Pour démontrer le théorème qui suit, on utilisera les *arbres sémantiques* que nous définissons maintenant formellement (après les avoir utilisés dans la preuve du théorème 2.2.1).

On suppose, ainsi que dans toute la suite, que l'ensemble des variables propositionnelles est dénombrable : $\mathcal{P} = \{P_i, i \in \mathbb{N}\}$. Une *interprétation partielle* est une application de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ dans $\{0, 1\}$. $\{P_1, \ldots, P_n\}$ est alors le domaine de l'interprétation partielle. Les interprétations partielles sont ordonnées par prolongement : $I \leq J$ si $Dom(I) \subseteq Dom(J)$ et $\forall x \in Dom(I), I(x) = J(x)$. Si $Dom(I) \neq \mathcal{P}$, il existe exactement deux interprétations partielles I_0 et I_1 telles que $I_0, I_1 > I$ et $\forall J, J > I \Rightarrow J \geq I_0$ ou $J \geq I_1$. I_0 et I_1 sont les *successeurs* de I. Si $Dom(I) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, I_0 est l'interprétation qui prolonge I par $I_0(P_{n+1}) = 0$. C'est le *fils droit* de I. I_1 prolonge I par $I_1(P_{n+1}) = 1$. C'est le *fils gauche* de I.

Une interprétation partielle I *falsifie* une clause C si toutes les variables propositionnelles de C sont dans le domaine de I et $I \not\models C$.

Si E est un ensemble de clauses, l'*arbre sémantique* $A(E)$ est défini comme suit. On confond les chemins finis de l'arbre, les noeuds de l'arbre et les interprétations partielles qui correspondent. On précise ci-dessous la correspondance.

- La racine correspond au chemin vide, c'est à dire à l'interprétation de domaine vide.
- Si N est un noeud de l'arbre correspondant à l'interprétation I de domaine $\{P_1, \ldots, P_n\}$,
  - Ou bien il existe une clause $C \in E$ telle que I falsifie C et N est un *noeud d'échec*. C'est alors une feuille de l'arbre et on l'étiquette par une clause de E falsifiée par I
  - Ou bien on n'est pas dans le premier cas et I est une interprétation totale sur $Var(t)$. Dans ce cas N est une feuille de l'arbre. C'est un *noeud de succès.*
  - Dans les autres cas, N a deux fils qui correspondent aux deux successeurs de I.

Exemple 2.4.2 Soit $E = \{P_1, \neg P_2 \vee \neg P_1, P_3 \vee \neg P_1\}$. L'arbre sémantique de E est représenté dans la figure 2.5. L'arbre comporte un noeud de succès (et un seul) qui correspond à la seule interprétation qui satisfait E.

Lemme 2.4.1 *Si E est un ensemble de clauses, alors E est satisfaisable si et seulement si ou bien $A(E)$ contient un noeud de succès, ou bien $A(E)$ contient un chemin infini.*

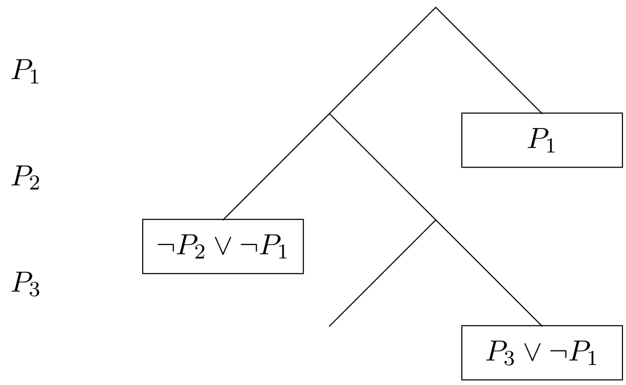

FIGURE 2.5 – Arbre sémantique de l'ensemble E de l'exemple 2.4.2

Preuve:
Si E est satisfaisable, alors l'interprétation I qui satisfait E définit ou bien un chemin conduisant à un noeud de succès (cas où $\mathcal{P}$ est fini) ou bien un chemin infini de $A(E)$ (cas où $\mathcal{P}$ est infini).

Réciproquement, si $A(E)$ contien un noeud de succès, alors l'interprétation I qui lui correspond est totale et ne falsifie aucune clause de E et donc $I \models E$. Si $A(E)$ contient un chemin infini, il existe une suite infinie d'interprétations partielles I_n (les noeuds de ce chemin) telles que $Dom(I_n) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $I_n < I_{n+1}$ et, pour tout n, I_n ne falsifie aucune clause de E. On définit alors I par $I(P_i) = I_i(P_i)$ pour tout i. Pour toute clause $C \in E$, si n_C est l'indice maximal d'une variable propositionnelle de C, $I_{n_C} \models C$ par construction, et, puisque I_{n_C} prolonge I_k pour $k \leq n_C$, I et I_C coïncident sur le domaine de I_{n_C}. Il en résulte que $I \models C$. $\Box$

Exercice 25 (2)
Construire l'arbre sémantique associé à $E = \{\neg P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \neg P_1 \vee P_3\}$ E est-il satisfaisable ? Pourquoi ?

Théorème 2.4.1 (Complétude réfutationnelle) *Un ensemble de clauses E est insatisfaisable si et seulement si $E \vdash_R \perp$.*

Preuve:
Si $E \vdash_R \perp$, alors E est insatisfaisable par le résultat de correction.

Supposons maintenant que E est insatisfaisable et montrons que $E \vdash_R \perp$.

Soit E^* l'ensemble des clauses C telles que $E \vdash_R C$. Comme $E \subseteq E^*$ est insatisfaisable, il en est de même pour E^*. Donc, d'après le lemme 2.4.1, $A(E^*)$ ne contient ni noeud de succès, ni chemin infini. Raisonnons alors par l'absurde et supposons que $A(E^*)$ n'est pas réduit à la racine. Soit alors N un noeud maximal ayant deux fils. Ces deux fils sont des feuilles, par maximalité, donc des noeuds d'échec. Soit I l'interprétation correspondant à N et I_0, I_1 ses deux successeurs, obtenus en interprétant la variable $P \notin Dom(I)$. Il existe des