Complexité - TD 06

Benjamin Bordais

07 Décembre 2021

Exercise 1 Quelques problèmes NL-complet

Montrer que les problèmes suivants sont NL-complet :

1. Décider si un automate non déterministe (sans ϵ-transition) accepte un mot w.
2. Décider si un graphe orienté est fortement connecté.
3. Décider si un graphe orienté a un cycle.

Exercise 2 Défnition alternative de NL

Une machine de Turing avec *certificat*, appelé un vérificateur, est une machine de Turing déterministe avec une bande additionnelle en lecture seule appelés la *bande de certificat*, qui est en outre, en *lecture unique*, c'est à dire que la tête de lecture ne peut pas faire de mouvement vers la gauche sur cette bande. Un vérificateur prend en entrée un mot x, avec en plus un mot écrit u écrit sur la bande de certificat.

On définit alors NL_{certif} comme la classe des langages L tels qu'il existe un polynôme $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un vérificateur V s'exécutant en espace logarithmique tel que :

$$x \in L \text{ ssi } \exists u, |u| \leq p(|x|) \text{ and } V \text{ accepts on input } (x, u)$$

1. Montrer que $\mathsf{NL}_{certif} = \mathsf{NL}$
2. Quelle classe de complexité obtient-on si on enlève la contrainte de lecture unique sur la bande de certificat ?

Exercise 3 Langages réguliers

Notons REG l'ensemble des langages réguliers/rationnels.

1. Montrer que, pour tout $L \in \mathsf{REG}$, L est reconnu par une TM s'exécutant en espace 0 et en temps $n + 1$.
2. Exhiber un langage reconnu par une machine de Turing en espace $O(\log n)$ et en temps $O(n)$ qui n'est pas dans REG.

Exercise 4 Too fast !

Montrer que $\mathsf{NTIME}(\log\ n) \neq \mathsf{L}$.

Exercise 5 Sur l'existence de fonction *dans un sens*

Une fonction *dans un sens* est une bijection f d'entiers à k-bit vers des entiers à k-bits telle que f est calculable en temps polynomial, mais pas f^{-1}. Prouver que pour toute fonction *dans un sens* f, on a

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid f^{-1}(x) < y\} \in (\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}) \backslash \mathsf{P}\ .$$

Exercise 6 Argument de "bourrage" (*padding* en anglais)

1. Montrer que si $\mathsf{DSPACE}(n^c) \subseteq \mathsf{NP}$ pour un $c > 0$, alors $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{NP}$.

   Indice : pour $L \in \mathsf{DSPACE}(n^k)$ *on pourra considérer le langage* $\tilde{L} = \{(x, 1^{|x|^{k/c}}) \mid x \in L\}$.
2. Déduisez-en que $\mathsf{DSPACE}(n^c) \neq \mathsf{NP}$. (On pourra utiliser le théorème de hiérarchie en espace de la feuille d'exercice précédente).