Complexité - TD 03

Benjamin Bordais

03 Décembre 2020

On rappelle la définition du problème suivant (dit de $\mathsf{SUBSET-SUM}$) :

— ENTRÉE : un ensemble d'entiers $T = \{n_1, \ldots, n_k\}$, un entier cible $t \in \mathbb{N}$

— SORTIE : il existe un sous-ensemble $S \subseteq T$ tel que $\sum_{n \in S} n = t$

Ce problème est NP-complet.

D'autre part, on donne ici les notions d'*image de Parikh* et du lemme d'Euler qui seront vus dans le prochain cours. Considérons un graphe orienté $G = (V, E)$. L'image de Parikh d'un chemin $\rho \in E^*$ est le vecteur $v : E \to \mathbb{N}$ qui compte les occurrences de chaque arête dans le graphe défini inductivement par $v_\epsilon[e] = 0$ et pour $e' \neq e$, on a $v_{\rho \cdot e'}[e] = v_\rho[e]$ et $v_{\rho \cdot e}[e] = v_\rho[e] + 1$. On définit de plus le support $Supp(v)$ d'un vecteur $v : E \to \mathbb{N}$ par $Supp(v) = \{e \in E \mid v(e) > 0\}$. Enfin, pour $E' \subseteq E$, on définit $G_{E'} = (V_{E'}, E')$ le graphe induit par E' tel que $V_{E'} = \{v \in V \mid \exists v' \in V,\ (v, v') \in E' \vee (v', v) \in E\}$.

On a alors le lemme suivant :

Lemme 1 (Euler) *Un vecteur $v : E \to \mathbb{N}$ est l'image de Parikh d'un chemin de s à t (avec $s \neq t$) si et seulement si :*

— $G_{Supp(v)}$ *est connexe ;*

— $\sum_{(s,u) \in E} v(s, u) = 1 + \sum_{(s,u) \in E} v(u, s)$

— $\sum_{(u,t) \in E} v(u, t) = 1 + \sum_{(t,u) \in E} v(t, u)$

— *Pour tout $w \neq s, t$, on a* $\sum_{(u,w) \in E} v(u, w) = \sum_{(w,u) \in E} v(w, u)$

On examine deux problèmes (le premier sera vu en cours) où montrer l'appartenance à NP est plus dur que montrer la NP-dureté.

Question 1 *Montrer que décider, dans un graphe $G = (V, E)$, si un vecteur $v : E \to \mathbb{N}$ est l'image de Parikh d'un chemin entre $s \in V$ et $t \in V$ peut s'effectuer en temps polynomial (et de manière déterministe) en la taille du graphe et des entiers apparaissant dans v.*

Graphe pondéré positivement

Question 2 *Montrer que le problème suivant est* NP*-complet.*

$\mathsf{GraphWeightedPositively}$

— *ENTRÉE : un graphe orienté $G = (V, E)$, pondéré positivement par $p : E \to \mathbb{N}$, deux sommets $s \neq t \in V$, un entier $a \in \mathbb{N}$*

— *SORTIE : il existe un chemin entre s et t de poids cumulé égal à a*

On rappelle que le poids cumulé $p(\rho)$ d'un chemin $\rho \in E^*$ est égal à $\sum_{e \in \rho} p(e)$.

Graphe pondéré négativement

On souhaite à présent montrer que le poblème suivant est NP-complet.

$\mathsf{GraphWeighted}$

— ENTRÉE : un graphe orienté $G = (V, E)$, pondéré par $p : E \to \mathbb{Z}$, deux sommets $s \neq t \in V$, un entier $a \in \mathbb{Z}$
— SORTIE : il existe un chemin entre s et t de poids cumulé égal à a

On considère donc un graphe $G = (V, E)$ pondéré par $p : E \to \mathbb{Z}$. On commence par définir ou rappeler quelques notions et notations qui seront utiles dans la suite de l'énoncé et dans vos solutions : Pour une arête $e = (u, v) \in E$, on note ${}^\bullet e$ pour u et $e^\bullet$ pour v. Un *chemin de longueur ℓ dans* G est un mot $\rho = e_1 \cdots e_\ell \in E^+$ composé de $\ell > 0$ arêtes de E et tel que ${e_{i-1}}^\bullet = {}^\bullet e_i$ pour tout $i = 2, \ldots, \ell$. Si $\rho = e_1 \cdots e_\ell$ est un chemin, les notations ${}^\bullet\rho$ et $\rho^\bullet$ désignent ${}^\bullet e_1$ et ${e_\ell}^\bullet$ respectivement. Comme précédemment, le poids $p(\rho)$ d'un chemin est la somme $\sum_{i=1}^{\ell} p(e_i)$ des poids de ses arêtes.

Un chemin $\rho = e_1 \ldots e_\ell \in E^+$ est un *cycle* si ${e_l}^\bullet = {}^\bullet e_1$ et le cycle est *élémentaire* si les sommets ${}^\bullet e_1, \ldots, {}^\bullet e_\ell$ sont tous distincts.

Question 3 *On dit qu'un chemin ρ est* factorisé en cycles *si ρ est écrit sous la forme*

$$\rho = \rho_0 \cdot \sigma_1^{k_1} \cdot \rho_1 \cdot \sigma_2^{k_2} \cdots \rho_{r-1} \cdot \sigma_r^{k_r} \cdot \rho_r$$

telle que les facteurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont des cycles élémentaires, les entiers $k_1, \ldots, k_r$ sont non nuls et les facteurs $\rho_0, \ldots, \rho_r$ n'ont aucun facteur qui soit un cycle. (La notation w^k avec $k \in \mathbb{N}$ dénote la concaténation de k copies de w, avec $w^0 = \epsilon$ et $w^{k+1} = w^k \cdot w$).

Montrez que tout chemin admet une factorisation en cycles.

Question 4 *Montrez que si G admet un chemin de poids a allant de s à t alors il existe en particulier un tel chemin avec une factorisation en cycles $\rho_0 \cdot \sigma_1^{k_1} \cdot \rho_1 \cdot \sigma_2^{k_2} \cdots \rho_{r-1} \cdot \sigma_r^{k_r} \cdot \rho_r$ telle que les σ_i's aient tous des poids $p(\sigma_i)$ différents et aucun de poids nul.*

Question 5 *Pour $G = (V, E)$ et $p : E \to \mathbb{Z}$, on notera k le nombre $|V|$ de sommets, m le nombre $|E|$ d'arêtes, et $P = \max_{e \in E} |p(e)|$ le plus grand poids (en valeur absolue). Ainsi la donnée du graphe utilise un espace mémoire en $O(k + m\lceil \log_2(P) \rceil)$.*

Donnez un polynôme à quatre variables $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tel que pour toute instance $\langle G, u, v, a \rangle$, si G a un chemin de poids a reliant u à v alors il existe un tel chemin de longueur bornée par $Q(k, m, P, a)$.

Question 6 *Montrer que le problème* GraphWeighted *est* NP*-complet.*

Un problème coNP-complet

Soit une classe $\mathcal{C}$ de problèmes de décision. La classe co$\mathcal{C}$ correspond à l'ensemble des langages L tel que $\bar{L} \in \mathcal{C}$: co$\mathcal{C} = \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$.

Question 7 *Supposons que le langage L soit complet pour la classe $\mathcal{C}$. Exhiber un langage complet pour la classe* co$\mathcal{C}$.

Question 8 *Prouver que le problème de décision suivant est* coNP*-complet :*

Tautology *:*

— *ENTRÉE : un formule propositionelle ϕ sous forme normale disjonctive*
— *SORTIE : toute valuation ν satisfait ϕ*

Question 9 *Un problème* coNP*-complet est-il (a priori) dans* NP *?*