Complexité - TD 01

Benjamin Bordais

19 Novembre 2020

Ici, on confond les notions de langage et de problème de décision. En effet, à partir d'un problème de décision, on peut considérer le langage associé qui est le langage des instances positives de ce problème de décision. De même, à partir d'un langage, on peut considérer le problème qui consiste à décider si une instance appartient à ce langage.

Les réductions considérées sont en espace logarithmique (sauf spécification contraire). On rappelle la définition du problème de décision SAT :

- ENTRÉE : une formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive
- SORTIE : ϕ est satisfiable

Ce problème est NP-complet.

On donne également la définition suivante d'une coloration d'un graphe. Une *k-coloration* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, \dots k-1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$. Le problème $3-\mathsf{COLORATION}$ est défini ainsi :

- ENTRÉE : un graphe non orienté G
- SORTIE : il existe une 3-coloration de G

Ce problème est NP-complet.

Échauffement

Réduction en temps polynomial

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage sur l'alphabet Σ. À quelles conditions L est PTIME-dur pour des réductions en temps polynomial ?

Un simple problème NP-complet

Soit L le langage $\{(M, x, 1^t) \mid M$ accepte sur x en temps au plus $t\}$ avec M le code d'une machine de Turing non-déterministe. Montrer que L est NP-complet.

Problème NP-complet sur des graphes

Ensemble indépendent

Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$. Démontrer que le langage $\mathsf{INDEPENDENT-SET}$ défini comme suit est NP-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;

SORTIE : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m

Ensemble couvrant

Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C, c'est-à-dire à au moins un élément de C. Démontrer que le langage $\mathsf{NODE} - \mathsf{COVER}$ défini comme suit est NP-complet.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;
SORTIE : G a un recouvrement de cardinal au plus m

Clique

Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G, c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème CLIQUE défini comme suit est NP-complet.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$;
SORTIE : G a une clique de cardinal au moins m

Homomorphisme de graphe

Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \to V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème $\mathsf{GRAPH} - \mathsf{HOMOMORPHISM}$ défini ci-après est NP-complet.
ENTRÉE : deux graphes non orientés, G_1 et G_2 ;
SORTIE : il existe un homomorphisme de G_1 à G_2

Isomorphisme de graphe

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$. Montrer que le problème $\mathsf{GRAPH} - \mathsf{ISOMORPHISM}$ défini ci-après est NP-complet.
ENTRÉE : Deux graphes G et H.
QUESTION : G contient un sous-graphe isomorphe à H

Bonus

Prouver que le problème $3 - \mathsf{COLORATION}$ est NP-complet. Pour prouver la NP-dureté de ce problème, on pourra effectuer une réduction depuis le problème 3-SAT, également NP-complet, qui une restriction de SAT aux formules avec au plus trois literaux par clause.