

# Logique du Premier Ordre

David Baelde\*

ENS Paris-Saclay, L3, 2019–2020

Dans ce document nous introduisons la syntaxe et la sémantique de la *logique du premier ordre*, aussi appelée *calcul des prédicats*. C'est la logique dans laquelle on fait la plupart des mathématiques, elle sert notamment de cadre à la théorie des ensembles, à l'arithmétique, etc. On la retrouve aussi largement en informatique, en preuve automatique (e.g. Prolog), preuve de programmes (cf. logique de Hoare), bases de données, etc.

## 1 Syntaxe

### 1.1 Termes

Une *signature* est un ensemble  $\mathcal{F}$  dont les éléments seront appelés *symboles de fonction*. Chaque symbole  $f \in \mathcal{F}$  est muni d'une *arité*  $a(f) \in \mathbb{N}$  qui fixe le nombre d'arguments. On se donne de plus un ensemble infini  $\mathcal{X}$  de *symboles de variables*, disjoint de  $\mathcal{F}$ .

**Definition 1.1.** L'ensemble  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$  des termes sur la signature  $\mathcal{F}$  et les variables  $\mathcal{X}$  est le plus petit ensemble tel que :

- $X \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ;
- si  $f \in \mathcal{F}$ ,  $a(f) = n$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ , alors  $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ .

Un terme doit être vu comme un arbre fini étiqueté par  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{X}$ .

On note  $\text{fv}(t)$  l'ensemble des variables apparaissant dans le terme  $t$ . C'est aussi le plus petit ensemble  $S$  tel que  $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, S)$ .

**Exemple 1.1.** Si l'on suppose que  $\mathcal{F}$  est composé des symboles  $+$ ,  $0$ ,  $s$  d'arités respectives 2, 0, 1, et  $x \in \mathcal{X}$ , alors

$$+(x, x) \quad \text{et} \quad +(+ (0, +(x, x)), x)$$

sont des termes de  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ . On utilise parfois l'écriture en notation infixée pour certains symboles usuels. Par exemple,  $+(0, s(0))$  s'écrira aussi  $0 + s(0)$ .

---

\*Ce document est extrait des notes de cours du MOOC *Introduction à la Logique Informatique* donné par David Baelde, Hubert Comon et Étienne Lozes en 2016, elles mêmes basées sur les notes de cours d'Hubert Comon. Le traitement des substitutions et de l' $\alpha$ -renommage est inspiré des notes de révision d'agrégation de Sylvain Schmitz.

Dans les exemples,  $\mathcal{F}$  est donné en listant ses éléments avec, entre parenthèses, l'arité du symbole correspondant.

**Exemple 1.2.** Si  $\mathcal{F} = \{\text{nil}(0), \text{cons}(2), @(2)\}$  et  $x, y, z \in \mathcal{X}$ ,  $@(cons(x, y), z) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ .

**Exemple 1.3.** Si  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$  et  $x, y \in \mathcal{X}$ ,  $\times(s(x), y) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ . On écrit aussi  $\times(s(x), y)$  en notation infixe :  $s(x) \times y$ .

On notera que  $\mathcal{F}$  peut être vide, auquel cas  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  est aussi vide. La réciproque n'est pas vraie. Bien sûr,  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$  n'est jamais vide.

## 1.2 Formules atomiques

On se donne un ensemble  $\mathcal{P}$  dont les éléments seront appelés *symboles de prédicat*. Chacun de ces symboles est à nouveau muni d'une arité. On suppose  $\mathcal{P}$  disjoint de  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{X}$ .

Les termes  $P(t_1, \dots, t_n)$  où  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$  et  $P \in \mathcal{P}$  est d'arité  $n$  sont appelés *formules atomiques*.

## 1.3 Formules du premier ordre

**Definition 1.2.** L'ensemble  $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$  des formules du premier ordre sur les symboles de prédicat  $\mathcal{P}$ , les symboles de fonction  $\mathcal{F}$  et les variables  $\mathcal{X}$  est le plus petit ensemble tel que :

- les formules atomiques sont dans  $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$ ;
- Si  $\phi, \psi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$  et  $x \in \mathcal{X}$  alors les formules suivantes sont toutes dans  $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$  :

$$\perp, \top, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \neg\phi, \phi \Rightarrow \psi, \forall x.\phi, \exists x.\phi.$$

Remarquons que, lorsque tous les symboles de  $\mathcal{P}$  sont d'arité 0, les formules sans quantificateur de  $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$  sont aussi des formules de  $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ .

On précisera rarement l'ensemble  $\mathcal{X}$  utilisé, car il n'a (dans le cadre de ce cours) par grande importance : on supposera simplement qu'il est infini. Les symboles de  $\mathcal{X}$  sont notés avec les lettres  $x, y, z$ .

**Exemple 1.4.** Si  $\mathcal{P} = \{B(1)\}$  et  $\mathcal{X} = \{x, y, z, \dots\}$ ,

$$\exists x. (B(x) \Rightarrow (\forall y. B(y)))$$

est une formule de  $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$ . On l'appelle la formule du buveur.

**Exemple 1.5.** La formule suivante n'est pas une formule du premier ordre :

$$\forall P.(P(0) \wedge \forall x.P(x) \Rightarrow P(s(x))) \Rightarrow \forall x.P(x)$$

## 1.4 Variables libres et variables liées

Les quantificateurs *lient* les variables. On définit ainsi  $\text{fv}(\phi)$ , l'ensemble des variables libres d'une formule  $\phi$ , par récurrence sur la formule :

$$\begin{aligned} \text{fv}(P(t_1, \dots, t_n)) &= \text{fv}(t_1) \cup \dots \cup \text{fv}(t_n) \quad \text{pour tout } P \in \mathcal{P} \text{ d'arité } n \\ \text{fv}(\perp) = \text{fv}(\top) &= \emptyset \\ \text{fv}(\phi \wedge \psi) = \text{fv}(\phi \vee \psi) &= \text{fv}(\phi) \cup \text{fv}(\psi) \\ \text{fv}(\phi \Rightarrow \psi) &= \text{fv}(\phi) \cup \text{fv}(\psi) \\ \text{fv}(\neg\phi) &= \text{fv}(\phi) \\ \text{fv}(\exists x.\phi) = \text{fv}(\forall x.\phi) &= \text{fv}(\phi) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

Quand  $\text{fv}(\phi) = \emptyset$ , on dit que  $\phi$  est une formule *close*.

On définit ensuite  $\text{bv}(\phi)$ , l'ensemble des variables liées de  $\phi$ , comme l'ensemble des variables  $x$  tel que  $\phi$  contient une sous-formule de la forme  $\exists x.\psi$  ou  $\forall x.\psi$ .

**Exemple 1.6.** Si  $\phi$  est la formule

$$P(x) \wedge \exists x.Q(f(x)) \wedge \exists x.\exists z.Q(g(x, y, z))$$

alors  $\text{fv}(\phi) = \{x, y\}$  et  $\text{bv}(\phi) = \{x, z\}$ .

## 2 Sémantique

### 2.1 $\mathcal{F}$ -algèbres

Etant donné une signature  $\mathcal{F}$  une  $\mathcal{F}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est constituée d'un ensemble non vide  $D_{\mathcal{A}}$  appelé son *domaine* et, pour chaque symbole de fonction  $f \in \mathcal{F}$  d'arité  $n$ , d'une fonction  $f_{\mathcal{A}} : D_{\mathcal{A}}^n \rightarrow D_{\mathcal{A}}$ .

**Exemple 2.1.**  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  et  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$  sont des  $\mathcal{F}$ -algèbres, avec  $f_{\mathcal{T}(\mathcal{F})}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$  et de même pour  $f_{\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})}$ .

**Exemple 2.2.** Soit  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2)\}$ . Alors  $(\mathbb{N}, \text{succ}_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}})$  est une  $\mathcal{F}$ -algèbre et  $(\mathbb{Q}_+, 1, \div 2, \div)$  est aussi une  $\mathcal{F}$ -algèbre, où  $\mathbb{Q}_+$  est l'ensemble des rationnels strictement positifs.

**Définition 2.1** (Affectation). Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{F}$ -algèbre, une  $\mathcal{A}$ -affectation est une application  $\sigma$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{A}$ .

Si  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ , et  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on note  $\{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n\}$  l'affectation  $\sigma$  telle que  $\sigma(x_i) = a_i$  pour tout  $i$ . Cette notation suppose que  $x_1, \dots, x_n$  sont des variables distinctes.

**Définition 2.2** (Interprétation). Si  $t \in T(\mathcal{F}, \{x_1, \dots, x_n\})$  et si  $\sigma$  est une affectation dans la  $\mathcal{F}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  telle que  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \text{dom}(\sigma)$ , on définit  $\llbracket t \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}$  par induction structurelle sur  $t$  :

$$\begin{aligned} \llbracket x \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}} &= \sigma(x) \\ \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}} &= f_{\mathcal{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}) \end{aligned}$$

Une substitution  $\theta$  est une affectation de domaine  $\mathcal{X}$  et à images dans la  $\mathcal{F}$ -algèbre des termes. L'application d'une substitution  $\theta$  à un terme  $t$ , notée  $t\theta$ , est simplement définie comme  $\llbracket t \rrbracket_{\theta, \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})}$ .

On définit  $\text{dom}(\theta) = \{x \in \mathcal{X} \mid x \neq \theta(x)\}$ , c'est l'ensemble des variables sur lesquelles  $\theta$  "fait quelque chose", qui sera bien souvent fini. On notera parfois une substitution  $\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ , il est alors implicite que la substitution se comporte comme la fonction identité sur les autres variables.

**Exemple 2.3.**  $\llbracket x + x \rrbracket_{\{x \mapsto 1\}, \mathbb{N}} = 2$

**Exemple 2.4.**  $\llbracket x + x \rrbracket_{\{x \mapsto s(0)\}, \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})} = s(0) + s(0) = (x + x)\{x \mapsto s(0)\}$

Le résultat suivant explicite le lien entre substitution et interprétation, et se prouve facilement par induction sur  $t$ .

**Proposition 2.1** (substitution). *Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{F}$ -algèbre,  $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ,  $\theta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$  une substitution, et  $\sigma$  une affectation de domaine  $\mathcal{X}$ . On a  $\llbracket t\theta \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}} = \llbracket t \rrbracket_{\theta\sigma, \mathcal{A}}$ , où  $\theta\sigma = x \mapsto \llbracket \theta(x) \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}$ .*

Un autre résultat élémentaire bien utile exprime que  $\llbracket t \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}$  ne dépend que des valeurs  $\sigma(x)$  pour  $x \in \text{fv}(t)$ .

**Proposition 2.2** (affaiblissement). *Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{F}$ -algèbre,  $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ,  $\sigma$  et  $\sigma'$  des affectations. Si  $\sigma|_{\text{fv}(t)} = \sigma'|_{\text{fv}(t)}$ , alors  $\llbracket t \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}} = \llbracket t \rrbracket_{\sigma', \mathcal{A}}$ .*

## 2.2 $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ -structures

**Définition 2.3.** *Une  $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ -structure  $\mathcal{S}$  est donnée par une  $\mathcal{F}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  et, pour chaque symbole de prédicat  $P \in \mathcal{P}$  d'arité  $n$  une relation  $P_{\mathcal{S}} \subseteq D_{\mathcal{A}}^n$ , où  $D_{\mathcal{A}}$  est le domaine de  $\mathcal{A}$ .*

On confondra parfois une structure et la  $\mathcal{F}$ -algèbre sous-jacente.

Soit  $\phi$  une formule,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ -structure d'algèbre sous-jacente  $\mathcal{A}$  et  $\sigma$  une  $\mathcal{A}$ -affectation  $\sigma$  telle que  $\text{fv}(\phi) \subseteq \text{dom}(\sigma)$ . On définit la relation de satisfaction  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$  par récurrence sur  $\phi$  :

- $\mathcal{S}, \sigma \models P(t_1, \dots, t_n)$  si et seulement si  $(\llbracket t_1 \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\sigma, \mathcal{A}}) \in P_{\mathcal{S}}$ ;
- $\mathcal{S}, \sigma \models \phi * \psi$  où  $*$  est l'un des connecteurs logiques binaires est défini, comme en calcul propositionnel, à partir des modèles de  $\phi$  et des modèles de  $\psi$ , par exemple  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi \vee \psi$  si et seulement si  $(\mathcal{S}, \sigma \models \phi$  ou  $\mathcal{S}, \sigma \models \psi)$ ;
- $\mathcal{S}, \sigma \models \neg\phi$  ssi  $\mathcal{S}, \sigma \not\models \phi$ ;
- $\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\phi$  ssi il existe  $a \in D_{\mathcal{A}}$  tel que  $\mathcal{S}, \sigma\{x \mapsto a\} \models \phi$ ;
- $\mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\phi$  ssi pour tout  $a \in D_{\mathcal{A}}$  on a  $\mathcal{S}, \sigma\{x \mapsto a\} \models \phi$ .

Ici  $\sigma\{x \mapsto a\}$  désigne l'affectation  $\sigma'$  qui coïncide avec  $\sigma$  sur  $\mathcal{X} \setminus \{x\}$  et telle que  $\sigma'(x) = a$ .

**Proposition 2.3** (affaiblissement). *Soit  $\phi$  une formule,  $\mathcal{S}$  une structure, et  $\sigma, \sigma'$  des affectations coïncidant sur  $\text{fv}(\phi)$ . On a  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$  ssi  $\mathcal{S}, \sigma' \models \phi$ .*

Quand  $\phi$  est une formule close (sans variable libre) on s'autorisera on écrira simplement  $\mathcal{S} \models \phi$  pour signifier que  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$  pour un  $\sigma$  quelconque.

### 2.3 Modèle, validité, conséquence logique

Une structure  $\mathcal{S}$  est un *modèle* d'une formule close  $\phi$  si  $\mathcal{S} \models \phi$ . Un modèle d'un ensemble de formules closes est une structure qui satisfait toutes les formules de l'ensemble. Une formule close est valide quand elle est satisfaite dans tout modèle.

Plus généralement, un modèle d'une formule  $\phi$  telle que  $\text{fv}(\phi) = \{x_1, \dots, x_n\}$  est donné par une structure  $\mathcal{S}$  et une affectation  $\sigma$  tel que  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ , et  $\phi$  est valide quand sa clôture universelle  $\forall x_1 \dots \forall x_n. \phi$  est valide.

Ces notions se généralisent à des ensembles de formules, comme suit.

**Definition 2.4.** Si  $\mathcal{E}$  est un ensemble de formules sans variable libre et  $\phi$  est une formule sans variable libre, alors  $\phi$  est une conséquence logique de  $\mathcal{E}$ , ce que l'on note  $\mathcal{E} \models \phi$ , si, pour toute structure  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} \models \mathcal{E}$  entraîne  $\mathcal{S} \models \phi$ .

Deux ensembles de formules sans variable libre  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont logiquement équivalents si toute formule de  $\mathcal{E}_2$  est conséquence logique de  $\mathcal{E}_1$  et, réciproquement, toute formule de  $\mathcal{E}_1$  est conséquence logique de  $\mathcal{E}_2$ .

**Exemple 2.5.** La formule  $\phi \equiv \exists x. \forall y. P(x, y)$  a pour conséquence logique  $\psi \equiv \forall y. \exists x. P(x, y)$  mais la réciproque n'est pas vraie. Autrement dit,  $\phi \Rightarrow \psi$  est valide mais il existe une structure ne satisfaisant pas  $\psi \Rightarrow \phi$ .

**Exemple 2.6.** La formule du buveur (cf. exemple 1.4) est valide.

### 2.4 Substitution

L'application d'une substitution à une formule pose deux problèmes : il ne faut pas remplacer des variables liées ( $(\forall x. p(x))\{x \mapsto t\} \not\equiv (\forall x. p(t))$ ); il ne faut pas que les lieux de la formule "capturent" des variables des termes insérés par la substitution ( $(\forall x. p(y))\{y \mapsto x\} \not\equiv (\forall x. p(x))$ ). Pour éviter ces problèmes on aura recours à l' $\alpha$ -équivalence, qui identifie par exemple  $\forall x. p(x)$  et  $\forall z. p(z)$ , ou encore  $\forall x. p(y)$  et  $\forall z. p(y)$ .

**Definition 2.5.** Si  $\theta$  est une substitution, on pose

$$\text{vars}(\theta) = \text{dom}(\theta) \cup \bigcup_{x \in \text{dom}(\theta)} \text{fv}(\theta(x)).$$

On dit que  $\theta$  est applicable à une formule  $\phi$  quand  $\text{bv}(t) \cap \text{vars}(\theta) = \emptyset$ , et l'on définit alors  $\phi\theta$  par induction sur  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \perp\theta &\equiv \perp \\ \top\theta &\equiv \top \\ (P(t_1, \dots, t_n))\theta &\equiv P(t_1\theta, \dots, t_n\theta) \\ (\neg\phi)\theta &\equiv \neg(\phi\theta) \\ (\phi * \psi)\theta &\equiv \phi\theta * \psi\theta \quad \text{pour } * \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \\ (\mathcal{Q}x.\phi)\theta &\equiv \mathcal{Q}x.(\phi\theta) \quad \text{pour } \mathcal{Q} \in \{\exists, \forall\} \end{aligned}$$

Autrement dit,  $t\theta$  est obtenu à partir de  $t$  en remplaçant chaque terme  $t$  (apparaissant nécessairement en argument d'un prédicat) par  $t\theta$ .

**Proposition 2.4** (substitution). *Soit  $\phi$  une formule,  $\theta$  une substitution applicable à  $\phi$ ,  $\mathcal{S}$  une structure, et  $\sigma$  une affectation de domaine  $\mathcal{X}$ . On a  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi\theta$  ssi  $\mathcal{S}, \theta\sigma \models \phi$ .*

*Démonstration.* On procède par induction sur  $\phi$ , les cas intéressants étant ceux des quantificateurs. Considérons  $\phi \equiv \forall x.\psi$ . On a les équivalences suivantes :

$$\mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\psi\theta$$

ssi pour tout  $a \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}, \sigma\{x \mapsto a\} \models \psi\theta$  par définition de la satisfaction

ssi pour tout  $a \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}, \theta(\sigma\{x \mapsto a\}) \models \psi$  par hypothèse d'induction sur  $\psi$

On remarque alors que  $\theta(\sigma\{x \mapsto a\}) = (\theta\sigma)\{x \mapsto a\}$  : les deux affectations valent  $a$  en  $x$  car  $x \in \text{bv}(\phi)$  donc  $x \notin \text{dom}(\theta)$ , i.e.  $\theta(x) = x$ ; elles coïncident sur tout autre variable  $y$  car  $\llbracket \theta(y) \rrbracket_{\sigma\{x \mapsto a\}} = \llbracket \theta(y) \rrbracket_{\sigma}$  puisque  $x \in \text{bv}(\phi)$  entraîne  $x \notin \text{fv}(\theta(y))$ .

On conclut alors aisément par les équivalences suivantes :

$$\mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\psi\theta$$

ssi pour tout  $a \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}, \theta(\sigma\{x \mapsto a\}) \models \psi$

ssi pour tout  $a \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}, (\theta\sigma)\{x \mapsto a\} \models \psi$

ssi  $\mathcal{S}, \theta\sigma \models \forall x.\psi$  □

On définit maintenant l' $\alpha$ -équivalence qui va nous permettre, pour tout  $\theta$  et  $\phi$ , de toujours nous ramener à une formule  $\alpha$ -équivalente (et logiquement équivalente)  $\psi$  pour laquelle  $\theta$  est applicable.

**Definition 2.6.** *La relation d' $\alpha$ -renommage est donnée par  $\mathcal{Q}x.\phi \rightarrow_{\alpha} \mathcal{Q}y.\phi\{x \mapsto y\}$  où  $\mathcal{Q}$  est un quantificateur,  $\phi$  une formule,  $x$  et  $y$  sont des variables telles que  $y \notin \text{fv}(\phi)$  et que la substitution  $\{x \mapsto y\}$  s'applique à  $\phi$ .*

*L' $\alpha$ -équivalence  $\equiv_{\alpha}$  est la plus petite congruence<sup>1</sup> contenant l' $\alpha$ -renommage.*

**Proposition 2.5.** *Pour tous  $\phi$  et  $\theta$  il existe  $\psi \equiv_{\alpha} \phi$  tel que  $\theta$  s'applique à  $\psi$ .*

*Idée de preuve.* On peut toujours changer, par  $\alpha$ -renommage, les variables liées de  $\phi$  (en traitant les quantificateurs du plus interne au plus externe) pour éviter l'ensemble fini  $\text{vars}(\theta)$ . □

**Proposition 2.6.** *Soient  $\mathcal{S}$ ,  $\sigma$ ,  $\phi$  et  $\psi$  tels que  $\phi \equiv_{\alpha} \psi$ . On a  $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$  ssi  $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour l' $\alpha$ -renommage, cela passe ensuite directement à la congruence. On détaille seulement le cas d'une quantification existentielle. Soit  $\exists x.\phi \rightarrow_{\alpha} \exists y.\phi\{x \mapsto y\}$  avec  $y \notin \text{fv}(\phi)$  et  $\{x \mapsto y\}$  s'appliquant à  $\phi$ .

On vérifie :

$$\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\phi$$

ssi il existe  $a$  tel que  $\mathcal{S}, \sigma\{x \mapsto a\} \models \phi$

ssi il existe  $a$  tel que  $\mathcal{S}, \{x \mapsto y\}(\sigma\{y \mapsto a\}) \models \phi$

ssi il existe  $a$  tel que  $\mathcal{S}, \sigma\{y \mapsto a\} \models \phi\{x \mapsto y\}$

ssi  $\mathcal{S}, \sigma \models \exists y.\phi\{x \mapsto y\}$

---

1. Une congruence est une relation d'équivalence qui passe au contexte : ici cela signifie que  $\phi \equiv_{\alpha} \psi$  entraîne  $\phi \wedge \phi' \equiv_{\alpha} \psi \wedge \phi'$ ,  $\forall x.\phi \equiv_{\alpha} \forall x.\psi$ , etc.

$$\forall x. \quad x = x$$

$$\forall x, y. \quad x = y \Leftrightarrow y = x$$

$$\forall x, y, z. \quad (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout symbole  $f \in \mathcal{F}$  d'arité  $n$  :

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n. \quad \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i = y_i \right) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout symbole  $P \in \mathcal{P}$  d'arité  $n$  :

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n. \quad \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i = y_i \right) \Rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow P(y_1, \dots, y_n)$$

FIGURE 1 – Axiomes de l'égalité :  $\mathcal{A}_{eq}$

On notera bien l'utilisation de  $y \notin \text{fv}(\phi)$  pour la deuxième étape, et de l'applicabilité de  $\{x \mapsto y\}$  à  $\phi$  pour l'étape suivante.  $\square$

## 2.5 Exemples

**Exemple 2.7.** L'ensemble des formules données dans la figure 1 est connu sous le nom d'axiomes de l'égalité. C'est un ensemble fini de formules si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}$  sont finis. On note, comme nous en avons l'habitude,  $u = v$  au lieu de  $=(u, v)$ .

Toute structure  $\mathcal{S}$  dans laquelle  $=$  est interprété par l'égalité sur  $D_{\mathcal{S}}$  est un modèle de  $\mathcal{A}_{eq}$ .

**Proposition 2.7.** Soit  $\mathcal{S}$  une structure satisfaisant  $\mathcal{A}_{eq}$ . Il existe une structure  $\mathcal{S}'$  dans laquelle  $=$  est interprété comme l'égalité (sur  $D_{\mathcal{S}'}$ ) telle que pour toute formule close  $\phi$ , on a  $\mathcal{S} \models \phi$  ssi  $\mathcal{S}' \models \phi$ .

**Exemple 2.8.** On considère ici  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$  et  $\mathcal{P} = \{\geq(2)\}$ . L'algèbre des entiers naturels (avec l'ordre habituel sur les entiers) satisfait la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \forall x. \geq(x, 0) \\ \wedge & \quad \forall x. \geq(x, x) \\ \wedge & \quad \forall x, y. \geq(x, y) \Rightarrow \geq(s(x), s(y)) \end{aligned}$$

Cette formule est aussi satisfaite par d'autres structures sur l'algèbre des entiers naturels, par exemple la structure où  $\geq$  est toujours vrai.

**Exercice 2.1.** On considère cette fois  $\mathcal{F} = \{@(2), \text{cons}(2), \text{nil}(0)\}$  et  $\mathcal{P} = \{=(2)\}$  et la formule suivante, censée définir  $@$  :

$$\forall x, y, z. \quad @(\text{nil}, x) = x \wedge @(\text{cons}(x, y), z) = \text{cons}(x, @(y, z))$$

$\forall x.$	$0 + x = x$
$\forall x, y.$	$s(x) + y = s(x + y)$
$\forall x.$	$0 \times x = 0$
$\forall x, y.$	$s(x) \times y = (x \times y) + y$
$\forall x.$	$s(x) \neq 0$
$\forall x, y.$	$s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$
$\forall x. \exists y.$	$x \neq 0 \Rightarrow x = s(y)$

FIGURE 2 – Arithmétique élémentaire :  $\mathcal{A}_{EL}$

Donner un exemple de structure  $\mathcal{S}$  qui satisfait ces formules ainsi que les axiomes de l'égalité, mais dans laquelle  $\mathcal{S} \not\models \forall x, y, z. @(x, @(y, z)) = @(@(x, y), z)$ .

**Exemple 2.9.** On considère ici  $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$  et  $\mathcal{P} = \{= (2)\}$ . Comme nous en avons l'habitude, nous notons  $u \neq v$  au lieu de  $\neg(u = v)$ ,  $u + v$  au lieu de  $+(u, v)$ ,  $u \times v$  au lieu de  $\times(u, v)$ . L'ensemble des sept formules de la figure 2, auquel on ajoute les axiomes de l'égalité, est connu sous le nom d'arithmétique élémentaire. Il s'agit de la plus simple des tentatives pour axiomatiser les entiers naturels : la structure construite sur les entiers naturels, dans laquelle tous ces symboles ont leur interprétation usuelle, est un modèle de l'arithmétique élémentaire. En revanche, il existe des modèles de  $\mathcal{A}_{EL}$  qui ne satisfont pas la commutativité de l'addition  $\forall x, y. x + y = y + x$ .