DM de Logique #1, 2019

Preuves Infinies pour les Algèbres de Kleene

David Baelde, ENS Paris-Saclay

Question 1
Parmi les séquents suivants, lesquels sont valides ?

1. $a + b, a + b \vdash a \cdot b$
2. $a, b \vdash (a + b) \cdot (a + b)$
3. $a, (a + b)^* \cdot b, (b \cdot a)^* \vdash b^* \cdot (a \cdot b^*)^*$
4. $b^* \cdot (a \cdot b^*)^* \vdash a \cdot (a + b)^* \cdot b \cdot (b \cdot a)^*$

Correction 1

1. Invalide car le mot ba appartient à $\mathcal{L}(a + b, a + b)$ mais pas à $\mathcal{L}(a \cdot b)$.
2. Valide car $\mathcal{L}(a, b) = \{ab\} \subseteq \mathcal{L}(a + b) \cdot (a + b)$.
3. Valide car $\mathcal{L}(b^* \cdot (a \cdot b)^*) = \{a, b\}^*$.
4. Invalide car le mot b n'appartient qu'au langage du membre gauche.

Question 2
Donner une preuve du séquent $(a \cdot b + b \cdot a)^* \vdash b^* \cdot (a \cdot b^*)^*$.

Correction 2
On pose $e = (a \cdot b + b \cdot a)^*$ et $f = b^* \cdot (a \cdot b^*)^*$; il faut dériver $e \vdash f$. **La technique obtenue en dernière partie du sujet permet de construire une preuve infinie non régulière, mais la solution attendue ici était une dérivation régulière plus simple. En fait, on n'y arrive pas avec les règles données !** On acceptera les réponses où des applications abusives des règles sont faites, comme dans la "solution" ci-dessous. On y note (!!) une application abusive de $\cdot_\mathsf{R}$ modulo associativité, ou bien une application de

$*_{\mathsf{R2}}$ déroulant une étoile sous un produit. On construit alors la dérivation Π suivante :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\vdash b^*}\,*_{\mathsf{R1}}
    \quad
    \dfrac{}{\vdash (a\cdot b^*)^*}\,*_{\mathsf{R1}}
  }{\vdash f}\,\cdot_{\mathsf{R}}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\vdash b^*}
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{}{a \vdash a}
          \quad
          \dfrac{
            \dfrac{
              \dfrac{}{b\vdash b}
              \quad
              \dfrac{\Pi}{e \vdash b^*\cdot(a\cdot b^*)^*}
            }{b, e \vdash (b\cdot b^*)\cdot(a\cdot b^*)^*}\,!!
          }{b, e\vdash b^*\cdot(a\cdot b^*)^*}\,!!
        }{a, b, e \vdash (a\cdot b^*)\cdot(a\cdot b^*)^*}\,!!
      }{a, b, e\vdash (a\cdot b^*)^*}\,*_{\mathsf{R2}}
    }{a, b, e \vdash f}\,\cdot_{\mathsf{R}}
    \quad
    \dfrac{\Pi'}{b, a, e\vdash f}\,\cdot_{\mathsf{R}}
  }{(a\cdot b + b\cdot a), e \vdash f}\,+_{\mathsf{L}}, \cdot_{\mathsf{L}}
}{e\vdash f}\,*_{\mathsf{L}}
$$

où Π' est :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{b\vdash b}
      \quad
      \dfrac{}{\vdash b^*}
    }{b\vdash b\cdot b^*}
  }{b\vdash b^*}
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{a\vdash a}
      \quad
      \dfrac{\Pi}{e\vdash b^*\cdot(a\cdot b^*)^*}
    }{a, e\vdash (a\cdot b^*)\cdot(a\cdot b^*)^*}\,!!
  }{a, e\vdash (a\cdot b^*)^*}
}{b, a, e\vdash f}\,\cdot_{\mathsf{R}}
$$

La seule branche infinie est celle correspondant une une répétition de Π, et il y a une application de $*_{\mathsf{L}}$ à chaque répétition, donc la dérivation est une preuve.

1 Correction

Question 3
Montrer que les règles $*_{\mathsf{L}}$, $*_{\mathsf{R1}}$ et $*_{\mathsf{R2}}$ sont correctes. On admettra pour la suite la correction de toutes les règles.

Correction 3

- Pour $*_{\mathsf{L}}$ on utilise le fait que $\mathcal{L}\Gamma, e^*, \Delta = \mathcal{L}\Gamma, \Delta \cup \mathcal{L}\Gamma, e, e^*, \Delta$. Ainsi, si $\mathcal{L}\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}\Gamma, e, e^*, \Delta \subseteq \mathcal{L}(f)$ on a bien $\mathcal{L}\Gamma, e^*, \Delta \subseteq \mathcal{L}(f)$.
- Pour $*_{\mathsf{R1}}$ c'est encore plus immédiat : en effet le langage de la liste vide, c'est à dire $\{\epsilon\}$, est inclus dans $\mathcal{L}(e^*)$.
- Pour $*_{\mathsf{R2}}$ on a $\mathcal{L}(e\cdot e^*) \subseteq \mathcal{L}(e^*)$ donc si le séquent prémisse est valide, i.e. $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(e\cdot e^*)$, le séquent conclusion le sera, i.e. $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(e^*)$.

Question 4 (?!)
On pose $e^0 = 1$, $e^{n+1} = e\cdot(e^n)$.
Montrer que si $\Gamma, e^*, \Delta \vdash_{\mathrm{LKA}} f$ alors $\Gamma, e^n, \Delta \vdash_{\mathrm{LKA}} f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction 4
On procède par induction sur n. Si l'occurrence de e^* considérée n'est jamais introduite

dans la dérivation, et n'est jamais utilisée dans un axiome, on peut la remplacer par n'importe quoi, en particulier e^n, partout dans la dérivation originale. Sinon, quand on remplace par e^n on doit adapter ces deux cas d'inférences dans la dérivation. Si l'on a un axiome sur $e^* \vdash e^*$ il faut désormais dérive $e^n \vdash e^*$, ce qui ne pose pas de problème. Considérons enfin une introduction de notre terme e^* :

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma', \Delta' \vdash f'} \quad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma', e, e^*, \Delta' \vdash f'}}{\Gamma', e^*, \Delta' \vdash f'}$$

On transforme localement soit en une instance de 1_{L} avec Π_1 comme sous-dérivation si $n = 0$, soit par une instance de $\cdot_{\mathsf{L}}$ avec comme sous-dérivation la sous-dérivation obtenue à partir de Π_2 en remplaçant e^* par e^{n-1}, qu'on a définie par hypothèse d'induction.

Question 5
Montrer que $\Gamma, e^*, \Delta \vdash f$ est valide si, pour tout n, le séquent $\Gamma, e^n, \Delta \vdash f$ est valide.

Correction 5
Par définition de la validité, puisque $\mathcal{L}(e^n) \subseteq \mathcal{L}(e^*)$ pour tout n.

Question 6
Montrer que, si $\Gamma \vdash e$ est conclusion d'une inférence autre que $*_{\mathsf{L}}$ avec $\Delta \vdash f$ parmi les prémisses, alors $w(\Delta) \leq w(\Gamma)$.

Correction 6
On a égalité des membres gauches des séquents pour toutes les règles droites sauf $\cdot_{\mathsf{R}}$. Pour cette règle, la conclusion est de la forme Γ, Δ avec Γ ou Δ en prémisse, et on a bien $w(\Gamma) \leq w(\Gamma, \Delta)$ et $w(\Delta) \leq w(\Gamma, \Delta)$ puisque notre ordre est compatible avec l'inclusion multi-ensembliste. Pour les règles $\cdot_{\mathsf{L}}$ et 1_{L} les séquents ne sont pas identiques mais ont même poids. Enfin, pour $+_{\mathsf{L}}$ on enlève $m(e_i)$ occurrences de $h(e_i)$ dans la prémisse où e_{1-i} reste.

Question 7
Montrer que $w(\Gamma, e^n, \Delta) < w(\Gamma, e^*, \Delta)$.

Correction 7
On remplace une occurrence de $h(e^*) = 1 + h(e)$ par $m(e^n)$ occurrences de $h(e^n) = h(e)$.

Question 8

Soit Π une ~~dérivation~~ **preuve** de LKA. Montrer qu'il existe un préfixe [1] fini [2] de Π ne contenant aucune application de $*_\mathsf{L}$ et dont les feuilles sont soit justifiées par une règle initiale soit conclusion de $*_\mathsf{L}$ dans Π.

Correction 8
Comme on a une preuve, et pas juste une pré-preuve, toute branche infinie contient une première occurrence de $*_\mathsf{L}$: on obtient un préfixe en coupant sur ces occurrences, il satisfait nos conditions, en particulier il est fini par le lemme de König.

Question 9 (?)
En utilisant la construction précédente, et en raisonnant par induction sur $w(\Gamma)$, montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LKA}} e$ alors $\Gamma \vdash e$ est valide.

Correction 9
On raisonne par induction sur $w(\Gamma)$. On considère le préfixe d'une preuve Π de $\Gamma \vdash e$ construit comme à la question précédente. Ses feuilles justifiées sont valides. Les autres sont de la forme $\Gamma', f^*, \Gamma'' \vdash e'$ avec $w(\Gamma', f^*, \Gamma'') \leq w(\Gamma)$. D'autre part, $\Gamma', f^*, \Gamma'' \vdash e'$ est dérivable (par une sous-dérivation de Π ayant $*_\mathsf{L}$ comme dernière règle) et donc $\Gamma', f^n, \Gamma' \vdash e'$ aussi d'après la question 5. Pour tout n, $w(\Gamma', f^n, \Gamma'') < w(\Gamma', f^*, \Gamma'')$ (question 7) donc $\Gamma', f^n, \Gamma' \vdash e'$ est valide par hypothèse d'induction. Toutes les feuilles du préfixe étant valides, et le préfixe étant fini et composé de règles localement valides, la conclusion est valide.

2 Complétude

Question 10 (?!)
Montrer que, si on applique autant que possible (éventuellement à l'infini) des règles gauches sur un séquent $\Gamma \vdash e$, on obtient une dérivation dont les séquents non justifiés sont de la forme $a_1, \ldots, a_n \vdash e$ avec $a_1 \ldots a_n \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Montrer de plus que chaque branche infinie de cette dérivation contient une infinité d'applications de $*_\mathsf{L}$.

Correction 10
Soit une dérivation, a priori infinie, comportant uniquement des règles gauches, et où les séquents non justifiés ne peuvent être conclusion d'une règle gauche. On remarque que si $\Delta \vdash e$ est en conclusion d'une règle et $\Delta' \vdash e$ en prémisse, alors $\mathcal{L}(\Delta') \subseteq \mathcal{L}(\Delta)$. Les séquents non justifiés ne pouvant contenir que des atomes, et comme chacun est à distance finie de la conclusion, on conclut le premier point. Pour le second, considérons une branche infinie ultimement sans application de $*_\mathsf{L}$: après la dernière application de $*_\mathsf{L}$

1. Si un arbre est représenté via un ensemble de positions $T \subseteq \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $u \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $un \in T$, on a aussi $u \in T$ et $um \in T$ pour tout $m \leq n$, alors un préfixe de T est simplement un sous-ensemble de T satisfaisant la même condition.
2. On demande simplement que le préfixe soit un arbre fini.

le nombre de connecteurs logiques descendrait à l'infini (on en enlève un par application de règle gauche) ce qui est absurde.

Question 11 (?)
Conclure que LKA est complet : tout séquent valide est prouvable.

Correction 11
Si $\Gamma \vdash e$ est valide, en reprenant la dérivation de la question précédente, il ne reste qu'à montrer que si $a_1 \ldots a_n \in \mathcal{L}(e)$ alors $a_1, \ldots, a_n \vdash e$ est prouvable, ce qui se fait facilement par induction sur e.

Question 12
Montrer que le séquent $a, a^* \vdash a^* \cdot a$ n'admet pas de preuve régulière.

Correction 12
On ne peut pas appliquer la règle droite sans perdre la validité. En appliquant la règle gauche on obtient une prémisse $a, a, a^* \vdash a^* \cdot a$ et ainsi de suite.