# Logique de Gödel-Löb

David Baelde

**Résumé**

**Ceci est la v2, apportant un correctif important sur (AGL-2).**
Le devoir est à rendre le 14 avril 2016.
Les questions particulièrement astucieuses sont marquées (?) ;
les plus techniques sont marquées (!).

Nous considérons le langage de la logique (propositionnelle) modale. Étant donné un ensemble $\mathcal{P}$ de constantes propositionnelles, ou atomes, on définit l'ensemble des formules $\phi$ comme suit :

$$\phi ::= P \mid \bot \mid \phi \Rightarrow \psi \mid \Box\phi \quad \text{où} \quad P \in \mathcal{P}.$$

On écrira $\neg\phi$ pour $\phi \Rightarrow \bot$. Si $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est un ensemble fini de formules, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \neg\Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \{\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n\} \\ \Gamma \Rightarrow \phi &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \phi_n \Rightarrow \phi \end{aligned}$$

Ce langage est évalué sur des structures de Kripke **différentes de celles vues en cours pour la logique intuitionniste**. On considèrera ici qu'une structure de Kripke est donnée par $(\mathcal{W}, \prec, \alpha)$ où :

- $\mathcal{W}$ est un ensemble de mondes ;
- $\prec \subseteq \mathcal{W}^2$ est une relation sur les mondes ;
- $\alpha : \mathcal{W} \to 2^{\mathcal{P}}$ est une fonction des mondes dans les ensembles d'atomes.

On notera que $\alpha$ est **quelconque**, pas forcément monotone.

Étant donné une structure $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \prec, \alpha)$ et un monde $w \in \mathcal{W}$, on définit par induction sur $\phi$ la relation de satisfaction $\mathcal{K}, w \models \phi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}, w &\not\models \bot \\ \mathcal{K}, w \models P \quad &\text{ssi} \quad P \in \alpha(w) \\ \mathcal{K}, w \models \phi \Rightarrow \psi \quad &\text{ssi} \quad \mathcal{K}, w \models \phi \ \text{ implique } \ \mathcal{K}, w \models \psi \\ \mathcal{K}, w \models \Box\phi \quad &\text{ssi} \quad \mathcal{K}, w' \models \phi \ \text{ pour tout } w \prec w' \end{aligned}$$

Un structure $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \prec, \alpha)$ et un monde $w \in \mathcal{W}$ constituent un *contre-modèle* du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ quand $\mathcal{K}, w \models \phi$ pour tout $\phi \in \Gamma$ et $\mathcal{K}, w \not\models \psi$ pour tout $\psi \in \Delta$.

Un séquent est *valide* quand il n'a pas de contre-modèle. Il est valide *pour une certaine classe de structures* quand il n'a pas de contre-modèle dans cette classe. On considèrera en particulier la classe des structures transitives (dans lesquelles $w \prec w' \prec w''$ entraîne $w \prec w''$) et celle des structures bien fondées (où il n'y a pas de chaîne infinie $w_1 \prec w_2 \dots w_n \prec w_{n+1} \prec \dots$, ce qui correspond en fait plutôt à la bonne fondaison de la relation renversée).

La logique de Gödel-Löb (GL) peut se définir de façon axiomatique à la Hilbert, en calcul des séquents, ou simplement comme l'ensemble des énoncés valides pour la classe des structures transitives et bien fondées. Nous allons voir ces trois présentations et montrer leur équivalence.

Il y a d'autres interprétations possibles de cette logique. La plus importante en logique mathématique, qui vaut à GL le nom de *logique de la prouvabilité*, interprète $\Box\phi$ comme la prouvabilité de (l'interprétation de) $\phi$. Par exemple, $\Box\Box P \Rightarrow \Box P$ s'interprète comme "pour toute formule $\phi$ de l'arithmétique, si l'on peut prouver qu'on peut prouver $\phi$, alors on peut prouver $\phi$". On trouve aussi des utilisations de GL en bases de données XML mais aussi, de façon plus éloignée de nos intérêts, en éthique.

**Question 1**

Donner des contre-modèles à moins de trois mondes pour les formules suivantes :

- $\Box\phi \Rightarrow \phi$
- $(\Box\phi \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow \Box(\phi \Rightarrow \psi)$

# 1 Calcul des séquents

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta} \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta} \Rightarrow_R$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot_L \qquad \frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi, \Delta} ax$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} w_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta} w_R$$

$$\frac{\Box\Gamma, \Gamma, \Box\phi \vdash \phi}{\Box\Gamma \vdash \Box\phi} \Box$$

Figure 1 – Calcul des séquents pour GL

On définit en Figure 1 le calcul des séquents LGL, qui nous servira de première définition de GL. Dans la règle $\Box$, la notation $\Box\Gamma$ signifie $\{ \Box\phi \mid \phi \in \Gamma \}$. Dans ce calcul, les membres $\Gamma$ et $\Delta$ des séquents sont des ensembles, et non des multi-ensembles. La notation $(\Gamma, \phi)$ se lit en général $\Gamma \cup \{\phi\}$, mais il est important de la lire comme une union *disjointe* dans la conclusion des règles de la Figure 1 : ainsi, l'application d'une règle (lue du bas vers la haut) supprime la formule principale du séquent.

**Question 2**
Dériver les formules suivantes dans LGL [1] :

1. $\Box\phi \Rightarrow \Box\Box\phi$
2. $\Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$
3. $\Box(\Box\bot \Rightarrow \phi) \Rightarrow \big(\Box(\phi \Rightarrow \bot) \Rightarrow \Box\bot\big)$

**Question 3**
Donner, pour chacune des trois formules précédentes, un contre-modèle **soit** non transitif **soit** non bien fondé, et dans tous les cas avec moins de trois mondes.

**Question 4**
Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta$ est prouvable, alors $\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta$ aussi.

**Question 5**
Montrer que, si $\Gamma, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta$ est prouvable, alors $\Gamma, \psi \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash \phi, \Delta$ aussi.

## 2 Présentation axiomatique

On considère maintenant la définition axiomatique de GL. On définit l'ensemble de formules AGL comme le plus petit ensemble $S$ tel que :

(AGL-1) si $\phi \in S$ alors $\Box\phi \in S$ ;
(AGL-2) $\Box(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\phi \Rightarrow \Box\psi) \in S$, pour tous $\phi$ et $\psi$ ; Merci
(AGL-3) $\Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$ est dans $S$, pour tout $\phi$ ; AL !
(AGL-4) toute formule purement propositionnelle valide [2] est dans $S$ ;
(AGL-5) si $\phi \Rightarrow \psi \in S$ et $\phi \in S$ alors $\psi \in S$, pour tous $\phi$ et $\psi$ ;
(AGL-6) $S$ est close par remplacement d'atomes par des formules quelconques.

1. La modalité $\Box$ lie plus fortement que $\Rightarrow$ : $\Box\phi \Rightarrow \psi$ se lit $(\Box\phi) \Rightarrow \psi$.
2. On parle ici d'une formule où la modalité $\Box$ n'apparaît pas, et la notion de validité est celle du calcul propositionnel classique.

**Question 6**
Montrer que $\Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$ est valide dans la classe des structures transitives bien fondées.

**Question 7** (?)
Montrer que si $\phi$ est valide dans la classe des structures transitives bien fondées, alors $\phi[P := \psi]$ aussi.

**Question 8**
Montrer que toute formule de AGL est valide dans la classe des structures transitives bien fondées.

On souhaite maintenant établir que tout ce qui est dérivable en LGL est dérivable en AGL. La réciproque découlera de la complétude de LGL, qui entraînera aussi la complétude de AGL.

**Question 9** (?)
Montrer que $\Box\phi \Rightarrow \Box\Box\phi$ est dans AGL.

**Question 10** (!)
On associe à un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ la formule $\Gamma \Rightarrow \neg\Delta \Rightarrow \bot$. Montrer que tout séquent prouvable de LGL correspond à une formule de AGL.

# 3 Correction et complétude du calcul des séquents

**Question 11**
Montrer que le calcul des séquents est correct par rapport à la classe considérée : tout séquent dérivable en LGL est valide dans la classe.

Pour la complétude, on procède par la contraposée : pour tout séquent non prouvable, nous cherchons à exhiber un contre-modèle. On fixe un ensemble fini de formules $\mathcal{F}$, clos par sous-formule et contenant au moins les formules du séquent non prouvable considéré.

**Question 12**
On dit qu'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est saturé quand, pour toutes formules $\phi$ et $\psi$ on a :
- $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Gamma$ entraîne $\phi \in \Delta$ ou $\psi \in \Gamma$ ;
- $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Delta$ entraîne $\phi \in \Gamma$ et $\psi \in \Delta$.

Montrer que pour tout séquent non prouvable $(\Gamma \vdash \Delta)$ il existe un séquent saturé non prouvable $(\Gamma' \vdash \Delta')$ avec $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et $\Delta \subseteq \Delta'$.

On considère la structure de Kripke $\mathcal{U}$ donnée par

$$\mathcal{W} = \{\ w_{\Gamma \vdash \Delta} \mid (\Gamma \vdash \Delta) \text{ est saturé, non prouvable et tel que } \Gamma \cup \Delta \subseteq \mathcal{F}\ \}$$

avec $\alpha(w_{\Gamma \vdash \Delta}) = \Gamma \cap \mathcal{P}$ et $w_{\Gamma \vdash \Delta} \prec w_{\Gamma' \vdash \Delta'}$ si et seulement si :

- il existe $\Box\phi \in (\Delta \setminus \Gamma) \cap \Gamma'$ ;
- pour tout $\Box\psi \in \Gamma$, on a $\Box\psi \in \Gamma'$ et $\psi \in \Gamma'$.

**Question 13**
Montrer que $\mathcal{U}$ est transitive.

**Question 14**
Montrer que $\mathcal{U}$ est bien fondée.

**Question 15**
Montrer par induction sur $\phi$ que $w_{\Gamma \vdash \Delta} \models \phi$ si $\phi \in \Gamma$ et $w_{\Gamma \vdash \Delta} \not\models \phi$ si $\phi \in \Delta$.

**Question 16**
Conclure que le calcul des séquents est complet : on peut y dériver tout séquent valide sur la classe des structures transitives bien fondées.

**Question 17** (?)
Montrer que GL est correcte et complète pour les arbres finis, c'est à dire pour la classe des structures de Kripke dont le graphe sous-jacent est un arbre fini, c'est à dire une structure transitive bien fondée satisfaisant de plus :

1. il existe une racine $w_0$ tel que $w_0 \prec w$ pour tout $w \in \mathcal{W}$ ;
2. il n'y a pas de branchement à gauche (transitivité exceptée) : si $w_1 \prec w$ et $w_2 \prec w$ alors $w_1 \prec w_2$ ou $w_2 \prec w_1$.

**Question 18** (?)
Proposer une modification de la règle $\Box$ de LGL afin d'obtenir un calcul correct et complet pour les structures transitives pas forcément bien fondées. On n'attend ici qu'une ébauche d'argument. Et si on enlève même la transitivité ?