Logique de Gödel-Löb

(DM de Logique 2016, Correction)

David Baelde

Résumé

Les questions particulièrement astucieuses sont marquées (?) ;
les plus techniques sont marquées (!).

Nous considérons le langage de la logique (propositionnelle) modale. Étant donné un ensemble $\mathcal{P}$ de constantes propositionnelles, ou atomes, on définit l'ensemble des formules ϕ comme suit :

$$\phi ::= P \mid \bot \mid \phi \Rightarrow \psi \mid \Box\phi \quad \text{où} \quad P \in \mathcal{P}.$$

On écrira $\neg\phi$ pour $\phi \Rightarrow \bot$. Si $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est un ensemble fini de formules, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \neg\Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \{\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n\} \\ \Gamma \Rightarrow \phi &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \phi_n \Rightarrow \phi \end{aligned}$$

Ce langage est évalué sur des structures de Kripke **différentes de celles vues en cours pour la logique intuitionniste**. On considèrera ici qu'une structure de Kripke est donnée par $(\mathcal{W}, \prec, \alpha)$ où :

- $\mathcal{W}$ est un ensemble de mondes ;
- $\prec \subseteq \mathcal{W}^2$ est une relation sur les mondes ;
- $\alpha : \mathcal{W} \to 2^{\mathcal{P}}$ est une fonction des mondes dans les ensembles d'atomes.

On notera que α est **quelconque**, pas forcément monotone.

Étant donné une structure $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \prec, \alpha)$ et un monde $w \in \mathcal{W}$, on définit par induction sur ϕ la relation de satisfaction $\mathcal{K}, w \models \phi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}, w &\not\models \bot && \\ \mathcal{K}, w &\models P && \text{ssi} \quad P \in \alpha(w) \\ \mathcal{K}, w &\models \phi \Rightarrow \psi && \text{ssi} \quad \mathcal{K}, w \models \phi \ \text{ implique } \ \mathcal{K}, w \models \psi \\ \mathcal{K}, w &\models \Box\phi && \text{ssi} \quad \mathcal{K}, w' \models \phi \ \text{ pour tout } w \prec w' \end{aligned}$$

Un structure $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \prec, \alpha)$ et un monde $w \in \mathcal{W}$ constituent un *contre-modèle* du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ quand $\mathcal{K}, w \models \phi$ pour tout $\phi \in \Gamma$ et $\mathcal{K}, w \not\models \psi$ pour tout $\psi \in \Delta$.

Un séquent est *valide* quand il n'a pas de contre-modèle. Il est valide *pour une certaine classe de structures* quand il n'a pas de contre-modèle dans cette classe. On considèrera en particulier la classe des structures transitives (dans lesquelles $w \prec w' \prec w''$ entraîne $w \prec w''$) et celle des structures bien fondées (où il n'y a pas de chaîne infinie $w_1 \prec w_2 \ldots w_n \prec w_{n+1} \prec \ldots$, ce qui correspond en fait plutôt à la bonne fondaison de la relation renversée).

La logique de Gödel-Löb (GL) peut se définir de façon axiomatique à la Hilbert, en calcul des séquents, ou simplement comme l'ensemble des énoncés valides pour la classe des structures transitives et bien fondées. Nous allons voir ces trois présentations et montrer leur équivalence.

Il y a d'autres interprétations possibles de cette logique. La plus importante en logique mathématique, qui vaut à GL le nom de *logique de la prouvabilité*, interprète $\Box\phi$ comme la prouvabilité de (l'interprétation de) ϕ. Par exemple, $\Box\Box P \Rightarrow \Box P$ s'interprète comme "pour toute formule ϕ de l'arithmétique, si l'on peut prouver qu'on peut prouver ϕ, alors on peut prouver ϕ". On trouve aussi des utilisations de GL en bases de données XML mais aussi, de façon plus éloignée de nos intérêts, en éthique.

Question 1
Donner des contre-modèles à moins de trois mondes pour les formules suivantes :

- $\Box\phi \Rightarrow \phi$
- $(\Box\phi \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow \Box(\phi \Rightarrow \psi)$

Correction 1
Non corrigé.

1 Calcul des séquents

On définit en Figure 1 le calcul des séquents LGL, qui nous servira de première définition de GL. Dans la règle $\Box$, la notation $\Box\Gamma$ signifie $\{ \Box\phi \mid \phi \in \Gamma \}$. Dans ce calcul, les membres Γ et Δ des séquents sont des ensembles, et non des multi-ensembles. La notation (Γ, ϕ) se lit ~~en général~~ $\Gamma \cup \{\phi\}$, ~~mais il est important de la lire comme une union *disjointe* dans la conclusion des règles de la Figure 1 : ainsi, l'application d'une règle (lue du bas vers la haut) supprime la formule principale du séquent~~.

Merci GLB !

Question 2

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta} \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta} \Rightarrow_R$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot_L \qquad \frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi, \Delta} ax$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} w_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta} w_R$$

$$\frac{\Box\Gamma, \Gamma, \Box\phi \vdash \phi}{\Box\Gamma \vdash \Box\phi} \Box$$

FIGURE 1 – Calcul des séquents pour GL

Dériver les formules suivantes dans LGL [1] :

1. $\Box\phi \Rightarrow \Box\Box\phi$
2. $\Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$
3. $\Box(\Box\bot \Rightarrow \phi) \Rightarrow \big(\Box(\phi \Rightarrow \bot) \Rightarrow \Box\bot\big)$

Correction 2
Non corrigé.

Question 3
Donner, pour chacune des trois formules précédentes, un contre-modèle **soit** non transitif **soit** non bien fondé, et dans tous les cas avec moins de trois mondes.

Correction 3
Non corrigé.

Question 4
Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta$ est prouvable, alors $\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta$ aussi.

Correction 4
On procède par induction sur la dérivation de $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta$.

Si la dernière règle qui s'applique est $\Rightarrow_R$ portant sur $\phi \Rightarrow \psi$, alors on conclut immédiatemment :

$$\frac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta} \quad \longrightarrow \quad \frac{\Pi_1}{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}$$

1. La modalité $\Box$ lie plus fortement que $\Rightarrow$: $\Box\phi \Rightarrow \psi$ se lit $(\Box\phi) \Rightarrow \psi$.

Si la dernière règle qui s'applique porte sur une formule de Δ, alors on conclut par hypothèse d'induction. Par exemple, si c'est $\Rightarrow_R$, portant sur $(\phi' \Rightarrow \psi') \in \Delta$ (ce qui n'exclut pas $\phi = \phi'$ et $\psi = \psi'$) on conclut en utilisant la dérivation Π'_1 obtenue par hypothèse d'induction à partir de la sous-dérivation Π_1 originale :

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma, \phi' \vdash \phi \Rightarrow \psi, \psi', \Delta'}}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \phi' \Rightarrow \psi', \Delta'} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Pi'_1}{\Gamma, \phi, \phi' \vdash \psi, \psi', \Delta'}}{\Gamma, \phi \vdash \psi, \phi' \Rightarrow \psi', \Delta'}$$

Si la dernière règle est un affaiblissement sur $\phi \Rightarrow \psi$, alors on a une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ ce qui permet de dériver $\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta$ par affaiblissements.

Si c'est un axiome sur $\phi \Rightarrow \psi$, on conclut par $\Rightarrow_L$ sur $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Gamma$ puis deux axiomes sur ϕ et ψ.

Question 5
Montrer que, si $\Gamma, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta$ est prouvable, alors $\Gamma, \psi \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash \phi, \Delta$ aussi.

Correction 5
Similaire à l'argument précédent.

2 Présentation axiomatique

On considère maintenant la définition axiomatique de GL. On définit l'ensemble de formules AGL comme le plus petit ensemble S tel que :

(AGL-1) si $\phi \in S$ alors $\Box\phi \in S$;
(AGL-2) $\Box(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\phi \Rightarrow \Box\psi) \in S$, pour tous ϕ et ψ ; Merci
(AGL-3) $\Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$ est dans S, pour tout ϕ ; AL !
(AGL-4) toute formule purement propositionnelle valide [2] est dans S ;
(AGL-5) si $\phi \Rightarrow \psi \in S$ et $\phi \in S$ alors $\psi \in S$, pour tous ϕ et ψ ;
(AGL-6) S est close par remplacement d'atomes par des formules quelconques.

Question 6
Montrer que $\Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$ est valide dans la classe des structures transitives bien fondées.

Correction 6
Soit une structure $\mathcal{K}$ et un monde w de $\mathcal{K}$. On montre $w \models \Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$,

2. On parle ici d'une formule où la modalité $\Box$ n'apparaît pas, et la notion de validité est celle du calcul propositionnel classique.

par induction sur la bonne fondaison [3] [4] [5] de w. On suppose $w \models \Box(\Box\phi \Rightarrow \phi)$. On veut montrer $w \models \Box\phi$: montrons $w' \models \phi$ pour tout $w \prec w'$. Par hypothèse d'induction, $w' \models \Box(\Box\phi \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Box\phi$. Par hypothèse d'induction, $w' \models \Box(\Box\phi \Rightarrow \phi)$, donc $w' \models \Box\phi$. Comme $w \models \Box(\Box\phi \Rightarrow \phi)$, $w' \models \Box\phi \Rightarrow \phi$. On conclut donc $w' \models \phi$ comme attendu.

Question 7 (?)
Montrer que si ϕ est valide dans la classe des structures transitives bien fondées, alors $\phi[P := \psi]$ aussi.

Correction 7
On procède par transformation de modèle. Fixons P et ψ. Pour tout $\mathcal{K}$ on va construire un $\mathcal{K}'$ avec mêmes mondes, tel que $\mathcal{K}', w \models \phi$ ssi $\mathcal{K}, w \models \phi[P := \psi]$. Ainsi, on aura bien $\mathcal{K}, w \models \phi[P := \psi]$ pour tout $\mathcal{K}$ (validité de $\phi[P := \psi]$) puisque $\mathcal{K}', w \models \phi$ pour tout $\mathcal{K}'$ (validité de ϕ).

La construction est simple : $\mathcal{K}'$ est identique à $\mathcal{K}$ sauf qu'on impose $P \in \alpha_{\mathcal{K}'}(w)$ ssi $\mathcal{K}, w \models \psi$. (En d'autres termes, on ne modifie que la présence ou l'absence de P dans les $\alpha(w)$.) On vérifie alors aisément par induction sur ϕ que $\mathcal{K}', w \models \phi$ ssi $\mathcal{K}, w \models \phi[P := \psi]$, pour tout w.

- Si $\phi = Q$ est un atome différent de P, alors $Q \in \alpha_{\mathcal{K}}(w)$ ssi $Q \in \alpha_{\mathcal{K}'}(w)$, ce qui permet de conclure par définition de la satisfaction pour un atome.
- Si $\phi = \Box\psi$, alors $\mathcal{K}', w \models \Box\psi$ est équivalent à $\mathcal{K}', w' \models \psi$ pour tout $w \prec w'$, lui même équivalent, par hypothèse d'induction sur ψ, à $\mathcal{K}, w' \models \psi$ pour tout $w \prec w'$, équivalent à $\mathcal{K}, w \models \Box\psi$.
- Le cas de $\bot$ est immédiat.
- Si $\phi = \phi' \Rightarrow \psi'$, on conclut aisément par hypothèses d'induction, suivant le même schéma que pour $\Box\psi$.

Question 8

3. Pour faire une induction sur la bonne fondaison on voit cette notion comme une définition inductive : l'ensemble des mondes bien fondés est le plus petit ensemble de mondes tel que w est bien fondé dès que tous ses successeurs le sont. L'hypothèse de bonne fondaison de $\mathcal{K}$ revient à dire que tous ses mondes sont bien fondés selon la définition précédente, ce qui permet de faire une induction sur cette propriété inductive de w.

4. En supposant que la structure est à branchement fini, on pourrait se ramener à une induction sur l'entier naturel représentant la hauteur du monde w (longueur de la plus longue chaîne partant de w). Sans le branchement fini, cette hauteur est un ordinal pas forcément fini, mais on peut encore faire une induction *transfinie* sur cette hauteur.

5. Enfin, on pouvait ne pas faire d'induction du tout, mais une preuve par l'absurde. En adaptant le coeur du raisonnement on peut, à partir d'un w_0 qui ne satisfait pas la formule, construire une chaîne infinie $w_0 \prec w_1 \prec \ldots \prec w_n \prec \ldots$ de mondes (dont aucun ne satisfait la formule).

Montrer que toute formule de AGL est valide dans la classe des structures transitives bien fondées.

Correction 8
On vérifie que chaque condition de clôture préserve la validité. Les cas (AGL-3,6) ont été vus plus haut. Pour (AGL-1) et (AGL-2) c'est une vérification aisée, que je ne détaille pas ici. C'est trivial pour (AGL-5).

Pour (AGL-4), cela vient du fait que la définition de la satisfaction pour la logique modale coincide (sur le fragment propositionnel) avec la notion de satisfaction du calcul propositionnel classique. Formellement, soit ϕ une formule propositionnelle classique $\mathcal{K}$ une structure quelconque, et w un de ses mondes. On peut naturellement voir $\alpha(w)$ comme une interprétation, ce qui permet de parler de la satisfaction $\alpha(w) \models \phi$ au sens classique. On montre alors, par induction sur ϕ, que $\mathcal{K}, w \models \phi$ ssi $\alpha(w) \models \phi$. Il n'y a que deux cas à considérer : $\phi = \bot$, qui est trivial ; $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$, qui se conclut aisément par hypothèses d'induction. On conclut enfin aisément que si ϕ est une tautologie classique, alors $\mathcal{K}, w \models \phi$ pour tout $\mathcal{K}, w$, i.e., ϕ est valide au sens modal.

On souhaite maintenant établir que tout ce qui est dérivable en LGL est dérivable en AGL. La réciproque découlera de la complétude de LGL, qui entraînera aussi la complétude de AGL.

Question 9 (?)
Montrer que $\Box\phi \Rightarrow \Box\Box\phi$ est dans AGL.

Correction 9
Étant donné deux formules ϕ_1 et ϕ_2, on définit $\phi_1 \wedge \phi_2$ comme $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$. On vérifie aisément que cette définition est logiquement équivalente à la conjonction. Par exemple, $\phi_1 \wedge \phi_2 \Rightarrow \phi_i$ est une tautologie classique.

On pose $\psi = \phi \wedge \Box\phi$. On va utiliser cette formule à la place de ϕ dans l'axiome de Löb (AGL-3). On a les formules suivantes dans AGL :

(a) $\psi \Rightarrow \phi$ est une tautologie classique (AGL-4,6) ;

(b) $\Box\psi \Rightarrow \Box\phi$ par (AGL-1,2,5) et (a) ;

(c) $\Box\psi \Rightarrow \Box\Box\phi$ de façon similaire ;

(d) $\phi \Rightarrow \Box\phi \Rightarrow \psi$ est une tautologie classique (AGL-4,6) ;

(e) $\phi \Rightarrow \Box\psi \Rightarrow \psi$ par (b,d) et raisonnement propositionnel (AGL-4,5,6) ;

(f) $\Box\phi \Rightarrow \Box(\Box\psi \Rightarrow \psi)$ par (e) et (AGL-1,2,5) ;

(g) $\Box\phi \Rightarrow \Box\psi$ par (AGL-3,5) et (f) ;

(h) $\Box\phi \Rightarrow \Box\Box\phi$ par (AGL-3,5) et (b).

Question 10 (!)
On associe à un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ la formule $\Gamma \Rightarrow \neg\Delta \Rightarrow \bot$. Montrer que tout séquent prouvable de LGL correspond à une formule de AGL.

Correction 10
Soit $\Gamma \vdash \Delta$ dérivable, on montre par induction sur sa dérivation qu'on a $\Gamma \Rightarrow \Delta \Rightarrow \bot$ dans AGL.

Pour les règles propositionnelles et l'affaiblissement, si on les écrit comme des formules alors ce sont des (instances de) tautologies classiques, elles sont donc dans AGL par (AGL-4,6), et par modus ponens (AGL-5) on a la conclusion dans AGL si les prémisses y sont.

Pour la règle $\Box$, on montre ci-dessous que si la prémisse est dans AGL, alors la conclusion aussi. On ne précise pas les utilisations de raisonnement propositionnel (AGL-4,5,6) :

$$\begin{array}{rl}
\Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\phi \Rightarrow \bot & \\
\Box\Gamma \Rightarrow \Box\phi & \\
\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Box\Gamma \Rightarrow \Box\phi & \text{transitivité} \\
\Box(\Gamma \Rightarrow \Box\Gamma \Rightarrow \phi) & \text{(AGL-2)} \\
\Box(\Box(\Gamma \Rightarrow \Box\Gamma \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \Box\Gamma \Rightarrow \phi) & \text{(AGL-3)} \\
\Box(\Gamma \Rightarrow \Box\Gamma \Rightarrow \phi) \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \Box\Gamma \Rightarrow \phi) & \text{(AGL-1)} \\
\Box(\Box(\phi) \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \Box\Gamma \Rightarrow \phi) &
\end{array}$$

La dernière étape est par transitivité, AGL-2 et raisonnement propositionnel.

3 Correction et complétude du calcul des séquents

Question 11
Montrer que le calcul des séquents est correct par rapport à la classe considérée : tout séquent dérivable en LGL est valide dans la classe.

Correction 11
On pouvait simplement remarquer que les séquents dérivables en LGL sont dérivables en AGL, et que AGL est correct. Bêtement je n'avais pas vu cela, et je m'attendais à une preuve directe de correction, comme ci-dessous.

Il suffit de vérifier que chaque règle préserve la validité : si les prémisses sont valides alors la conclusion aussi. Cela a été vu en cours pour la plupart des règles, je ne détaille que la règle $\Box$.

On suppose $\Box\Gamma, \Gamma, \Box\phi \vdash \phi$ valide. On veut montrer que $\Box\Gamma \vdash \Box\phi$ est aussi valide, c'est à dire que pour toute $\mathcal{K}$ (transitive et bien fondée) et tout $w \in \mathcal{W}(\mathcal{K})$, si w satisfait toutes les formules de $\Box\Gamma$, alors $\mathcal{K}, w \models \Box\phi$.

On procède par induction sur la bonne fondaison [6] de w : il suffit de montrer la propriété en la supposant vraie pour tout $w \prec w'$. Pour montrer $w \models \Box\phi$, prenons un $w \prec w'$ arbitraire et cherchons à établir $w' \models \phi$. Comme $w \models \Box\Gamma$ on a $w' \models \Gamma$ et aussi $\Box\Gamma$. Par hypothèse d'induction on a enfin $w' \models \Box\phi$. Par validité du séquent prémisse, on en déduit que $w' \models \phi$.

Pour la complétude, on procède par la contraposée : pour tout séquent non prouvable, nous cherchons à exhiber un contre-modèle. On fixe un ensemble fini de formules $\mathcal{F}$, clos par sous-formule et contenant au moins les formules du séquent non prouvable considéré.

Question 12
On dit qu'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est saturé quand, pour toutes formules ϕ et ψ on a :
- $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Gamma$ entraîne $\phi \in \Delta$ ou $\psi \in \Gamma$;
- $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Delta$ entraîne $\phi \in \Gamma$ et $\psi \in \Delta$.

Montrer que pour tout séquent non prouvable $(\Gamma \vdash \Delta)$ il existe un séquent saturé non prouvable $(\Gamma' \vdash \Delta')$ avec $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et $\Delta \subseteq \Delta'$.

Correction 12
On procède par induction sur le nombre de formules qui ne sont pas encore présentes dans le séquent, en tenant compte séparemment de la gauche et de la droite du séquent. Formellement, notre mesure est donc $2 \times |\mathcal{F}| - |\Gamma| - |\Delta|$. S'il n'y a aucune formule pour laquelle la condition de saturation est violée, il n'y a rien à faire. Sinon, on va rajouter une formule, ce qui nous permettra de conclure par hypothèse d'induction.

Si la condition de saturation est invalidée pour $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Gamma$, alors comme le séquent est non prouvable, l'une des prémisses de la règle $\Rightarrow_L$ est encore non prouvable [7]. Supposons que cela soit $\Gamma, \psi \vdash \Delta$. On peut conclure par hypothèse d'induction, car on bien ajouté un élément à gauche du séquent, puisqu'on avait au départ $\psi \notin \Gamma$. On procède de façon similaire quand c'est l'autre prémisse qui est non prouvable, et quand la condition est invalidée pour $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Delta$.

6. Voir notes de bas de page pour la correction de AGL.

7. On considère ici une application de la règle qui ne satisfait pas la condition d'union disjointe, ce qui revient à dire qu'on fait une contraction implicitement. Sans cela il fallait travailler un poil plus, en utilisant les questions du début de l'énoncé.

On considère la structure de Kripke $\mathcal{U}$ donnée par

$$\mathcal{W} = \{ \ w_{\Gamma \vdash \Delta} \mid (\Gamma \vdash \Delta) \text{ est saturé, non prouvable et tel que } \Gamma \cup \Delta \subseteq \mathcal{F} \ \}$$

avec $\alpha(w_{\Gamma \vdash \Delta}) = \Gamma \cap \mathcal{P}$ et $w_{\Gamma \vdash \Delta} \prec w_{\Gamma' \vdash \Delta'}$ si et seulement si :

- il existe $\Box\phi \in (\Delta \setminus \Gamma) \cap \Gamma'$;
- pour tout $\Box\psi \in \Gamma$, on a $\Box\psi \in \Gamma'$ et $\psi \in \Gamma'$.

Question 13
Montrer que $\mathcal{U}$ est transitive.

Correction 13
C'est une simple vérification.

Question 14
Montrer que $\mathcal{U}$ est bien fondée.

Correction 14
L'irréflexivité est immédiate par définition de $\prec$ car on demande $\Box\psi \in \Delta'$ et $\Box\psi \notin \Delta$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de séquents sur $\mathcal{F}$, la bonne fondaison équivaut à l'absence de cycle, qui est exclue par transitivité et irreflexivité.

Question 15
Montrer par induction sur ϕ que $w_{\Gamma \vdash \Delta} \models \phi$ si $\phi \in \Gamma$ et $w_{\Gamma \vdash \Delta} \not\models \phi$ si $\phi \in \Delta$.

Correction 15
On pose $s = (\Gamma \vdash \Delta)$ et $w = w_s$.

- $P \in \Gamma$: par définition, $w \models P$.
- $\bot \in \Gamma$: c'est exclu car le séquent serait alors prouvable.
- $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Gamma$: on a $\phi \in \Delta$ ou $\psi \in \Gamma$, donc, par hypothèse d'induction, $w \not\models \phi$ ou $w \models \psi$, c'est à dire $w \models \phi \Rightarrow \psi$.
- $(\Box\phi) \in \Gamma$: par définition, si $w \prec w'_{\Gamma' \vdash \Delta'}$ on aura $\phi \in \Gamma'$, donc $w'_{\Gamma' \vdash \Delta'} \models \phi$, d'où $w \models \Box\phi$.
- $P \in \Delta$: comme le séquent n'est pas prouvable, on a $P \notin \Gamma$, donc $w \not\models P$.
- $\bot \in \Delta$: on a évidemment $w \not\models \bot$.
- $(\phi \Rightarrow \psi) \in \Delta$: on a $\phi \in \Gamma$ et $\psi \in \Delta$ par saturation, donc $w \models \phi$ et $w \not\models \psi$ par hypothèse d'induction, d'où $w \not\models \phi \Rightarrow \psi$.
- $(\Box\phi) \in \Delta$: comme le séquent n'est pas prouvable, $(\Box\phi) \notin \Gamma$; après quelques affaiblissements, on peut appliquer la règle $\Box$ sur $\Box\phi$; après saturation le séquent $s' = (\Gamma' \vdash \Delta')$ obtenu est tel que $s \prec s'$; enfin $\phi \in \Delta'$ d'où $s' \not\models \phi$, et $s' \not\models \Box\phi$.

Question 16
Conclure que le calcul des séquents est complet : on peut y dériver tout séquent valide sur la classe des structures transitives bien fondées.

Correction 16
Soit un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ non prouvable. Il existe un séquent saturé non prouvable $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$. Soit w le monde associé, c'est un contre-modèle du séquent saturé, et donc du séquent original.

Question 17 (?)
Montrer que GL est correcte et complète pour les arbres finis, c'est à dire pour la classe des structures de Kripke dont le graphe sous-jacent est un arbre fini, c'est à dire une structure transitive bien fondée satisfaisant de plus :

1. il existe une racine w_0 tel que $w_0 \prec w$ pour tout $w \in \mathcal{W}$;
2. il n'y a pas de branchement à gauche (transitivité exceptée) : si $w_1 \prec w$ et $w_2 \prec w$ alors $w_1 \prec w_2$ ou $w_2 \prec w_1$.

Correction 17
La correction est un cas particulier du résultat précédent. Pour la complétude, le problème est que l'on peut avoir un branchement à gauche ($w_1 \prec w$ et $w_2 \prec w$), et pas forcément de racine, dans le contre-modèle obtenu par l'argument précédent, Mais à partir d'une structure transitive bien fondée, et en fixant une racine, on peut construire un arbre en distinguant les noeuds en fonction du chemin qui a permis d'y parvenir à partir de la racine. La structure obtenue satisfait les mêmes formules en sa racine que la structure originale.

Plus formellement, étant donné $\mathcal{K}$ et $w \in \mathcal{W}(\mathcal{K})$, on définit $\mathcal{K}_w$ dont les mondes sont des séquences de monde $w_0 w_1 \ldots w_n$ avec $w_0 = w$ et $w_i \prec w_{i+1}$, et on prend l'ordre préfixe comme relation d'accessibilité dans $\mathcal{K}_w$. On obtient bien une structure bien fondée et transitive, et c'est un arbre.

Dans le cas où on applique cette construction à $\mathcal{U}$, l'arbre est à branchement fini et donc fini.

Question 18 (?)
Proposer une modification de la règle $\Box$ de LGL afin d'obtenir un calcul correct et complet pour les structures transitives pas forcément bien fondées. On n'attend ici qu'une ébauche d'argument. Et si on enlève même la transitivité ?

Correction 18

Si on enlève l'hypothèse de bonne fondaison, une bonne règle $\square$ est la suivante :

$$\frac{\Gamma, \square\Gamma \vdash \phi}{\square\Gamma \vdash \square\phi}$$

On adapte aisément l'argument de correction. Pour la complétude, on n'aura pas l'irréfléxivité de $\mathcal{U}$, donc pas la bonne fondaison, mais ce n'est pas grave : on garde la transitivité, c'est tout ce dont on a besoin.

Si on enlève aussi la transitivité :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\square\Gamma \vdash \square\phi}$$

Ce n'était pas demandé et pas nécessaire, mais on pouvait aussi adapter AGL : pour les structures transitives, remplacer (AGL-3) par $\square\phi \Rightarrow \square\square\phi$; pour les structures quelconques, supprimer cet axiome.